

Séquence 4

Temps, cinématique et dynamique newtoniennes

Problématique

La séquence 4 traite de deux parties de la chimie qui sont indépendantes l'une de l'autre. Cette séquence s'inscrit dans la problématique suivante :

« Comment exploite-t-on des phénomènes périodiques pour accéder à la mesure du temps. »

En effet, nous allons étudier les grandes lois régissant les mouvements des planètes et des satellites établies progressivement par des physiciens illustres. Elles ont abouti à la théorie de la mécanique newtonienne établie au ^{xvii}^e siècle par Isaac Newton. Un des grands mérites de cette théorie est qu'elle s'applique universellement autant aux mouvements des corps célestes (étoiles, planètes, satellites...) qu'aux mouvements d'objets plus petits observés en laboratoire. Encore utilisée pour la grande majorité des études en mécanique, cette théorie comporte néanmoins des limites mises en évidence au début du ^{xx}^e siècle et que nous n'aborderons que dans les séquences suivantes.

Sommaire

1. Prérequis
2. Temps et cinématique
3. Les lois de Newton
4. Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé
5. Mouvement des satellites et des planètes
6. Pour clore la séquence

Prérequis

Objectifs de la séquence

- ▶ Choisir un référentiel d'étude.
- ▶ Apprendre à décrire un mouvement et à donner les caractéristiques de son vecteur accélération.
- ▶ Définir la quantité de mouvement d'un point matériel.
- ▶ Connaître et exploiter les trois lois de Newton, les mettre en œuvre pour étudier des mouvements dans les champs de pesanteur et électrostatique uniforme.
- ▶ Expliquer le mode de propulsion par réaction à l'aide de la quantité de mouvement.
- ▶ Connaître les trois lois de Kepler.
- ▶ Montrer que le mouvement d'un satellite ou d'une planète est uniforme dans le cas d'une trajectoire circulaire.
- ▶ Établir l'expression de la vitesse et de la période d'un satellite, d'une planète.

A

Prérequis de la classe de 2^{de}

1. Période d'un mouvement périodique

De nombreux mouvements se répètent dans le temps (rotation d'une roue, oscillation d'un pendule) : on les appelle des mouvements périodiques.

La période d'un mouvement périodique est la plus petite durée pour que le mouvement se répète identiquement à lui-même. La période s'exprime en secondes.

La fréquence est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T}$, T s'exprimant en secondes et f en hertz (Hz).

2. Relativité du mouvement. Référentiel. Trajectoire et vitesse

Exemple

Trois personnes se croisent dans un couloir de métro : la première (A) est immobile sur un tapis roulant automatique se déplaçant à vitesse constante dans le couloir, la deuxième (B) est immobile dans le couloir et la troisième (C) marche dans le couloir de manière à rester à hauteur de A.

Si l'observateur est lié au couloir (premier corps de référence) : B est immobile tandis que A et C sont en mouvement.

Si l'observateur est lié au tapis roulant (second corps de référence) : B est en mouvement tandis que A et C sont immobiles.

Il est donc nécessaire de choisir un même corps de référence pour étudier le mouvement. Ce corps de référence est appelé référentiel. Dans l'exemple précédent, on peut utiliser deux référentiels différents : un référentiel lié au couloir (référentiel terrestre) ou un référentiel lié au tapis roulant.

La trajectoire d'un corps est la courbe formée par l'ensemble des positions successives occupées dans l'espace par un point du corps judicieusement choisi ; ce point peut être le centre du corps. On peut obtenir cette trajectoire en enregistrant le mouvement du corps par chronophotographie ou par vidéo. Elle dépend du référentiel.

Pour décrire un mouvement, on peut déterminer la trajectoire du corps mais aussi sa vitesse. Elle dépend également du référentiel. On définit deux types de vitesse :

- La vitesse instantanée d'un corps en mouvement est sa vitesse à l'instant où on l'observe. C'est, par exemple, la vitesse indiquée par le compteur d'une voiture.
- La vitesse moyenne v (en m.s^{-1}) d'un corps est définie comme étant égale au quotient de la distance d (en m) parcourue entre deux positions par la durée Δt (en s) de son déplacement :

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

Test 1 : Manège

On considère un manège de fête foraine qui tourne à vitesse constante. Une personne se tient immobile par rapport au plateau tournant à une distance $d = 3,0$ m du centre du plateau. Sa vitesse, constante par rapport au sol, est $v = 8,5 \text{ km.h}^{-1}$.

- 1 Quel est le nom usuel du référentiel par rapport auquel la vitesse de la personne est définie ?
- 2 Dans ce référentiel, quelle est la trajectoire de la personne ?
- 3 En déduire la période T de son mouvement.
- 4 Dans le référentiel du plateau tournant, quel est le mouvement de la personne ?

3. Actions mécaniques, modélisation par une force

Une action mécanique qui s'exerce sur un corps peut modifier : soit la valeur de sa vitesse, soit la forme de sa trajectoire, soit les deux à la fois. On la modélise par une force représentée par un vecteur appliqué en un point d'application. La valeur de la force s'exprime en newtons (N).

La modification du mouvement provoqué par une force dépend le plus souvent de la masse du corps ; en général, l'effet d'une force sur le mouvement d'un corps est d'autant plus faible que la masse du corps est grande.

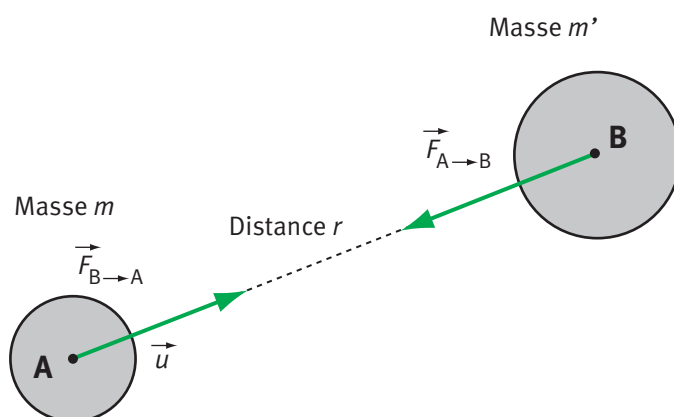
Exemple Si l'on exerce deux forces identiques de direction horizontale sur deux patineurs de masses différentes immobiles sur la glace d'une patinoire, le patineur le plus léger est mis en mouvement avec une vitesse plus grande que celle de l'autre patineur.

4. Principe d'inertie

Si la trajectoire d'un corps est une droite et si la valeur de la vitesse reste constante, le mouvement du corps est rectiligne et uniforme. Ce type de mouvement est particulièrement important car il correspond au mouvement d'un corps qui n'est soumis à aucune force (astéroïdes ou comètes loin du système solaire). On observe également ce mouvement lorsque le corps est soumis à des forces qui se compensent (c'est-à-dire dont la somme vectorielle est nulle).

Si un système est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme, alors les forces qui s'exercent dessus se compensent. C'est le principe d'inertie. La réciproque est également vraie.

5. L'interaction gravitationnelle entre deux corps



Dans le cas de deux corps à répartition sphérique de masse m et m' placées en A et B, la force d'interaction gravitationnelle exercée par m sur m' a pour expression vectorielle :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -G \frac{m m'}{r^2} \vec{u}$$

où G est la constante de gravitation ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI) et r la distance entre les centres de ces corps.

Test 2 : Force de gravitation

La Lune se situe à une distance moyenne $d = 3,83.10^5$ km de la Terre. La masse de la Terre est $M_T = 5,97.10^{24}$ kg, celle de la Lune est $M_L = 7,35.10^{22}$ kg. La constante de gravitation universelle est $G = 6,67.10^{-11}$ S.I.

- 1 Déterminer la valeur de la force de gravitation qu'exerce la Terre sur la Lune.
- 2 Quelle est l'influence de cette force sur le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique ?
- 3 Que se passerait-il si la Lune était libérée de cette force ?



Prérequis de la classe de 1^{re} S

1. Champ gravitationnel

Tout corps de masse m soumis à la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}$ de la Terre est placé dans le champ gravitationnel $\vec{g}_T$ appelé aussi champ de gravitation de celle-ci. Ce champ est une propriété de l'espace qui s'applique à tous les objets ayant une masse et dépend de la distance d entre le centre de la Terre et l'objet. Il est orienté vers le centre de la Terre.

Le champ gravitationnel s'exprime par :

$$\vec{g}_T = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{or} \quad \vec{F} = - G \frac{m M_T}{r^2} \vec{u}$$
$$\text{donc} \quad \vec{g}_T = - G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}$$

On peut définir d'autres champs gravitationnels. Par exemple, le champ de gravitation de la Lune $\vec{g}_L$ a une valeur 6 fois moins importante que celui de la Terre.

2. Champ de pesanteur local

Tout corps placé près de la surface de la Terre est soumis à son poids. Le poids est considéré comme la force de gravitation qu'exerce la Terre sur un corps placé à sa surface. Il a pour expression :

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad \text{où } \vec{g} \text{ est le champ de pesanteur.}$$

On identifie donc le champ de pesanteur et le champ gravitationnel près de la surface de la Terre. On considère que, localement, sa direction et son sens correspondent à un axe vertical orientée vers le bas.

Test 3 : Pesanteur terrestre

On s'intéresse à un objet de masse m placé à la surface de la Terre.

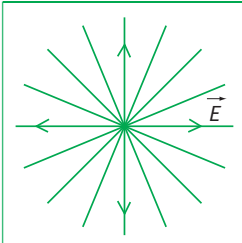
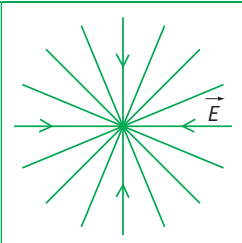
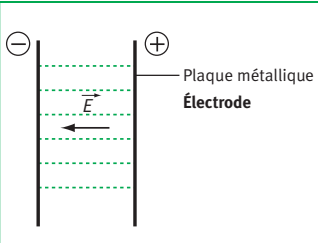
- ❶ Donner l'expression de la force de gravitation qu'exerce la Terre sur cet objet.
- ❷ Donner l'expression du poids de cet objet en fonction de m et du champ de pesanteur.
- ❸ En supposant que le poids et la force de gravitation précédemment déterminés sont une même et unique force, déterminer l'expression du champ de pesanteur terrestre.
- ❹ Donner les caractéristiques du champ de pesanteur local.

Données

La masse de la Terre est $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, le rayon de la Terre est $R_T = 6380$ km, la constante de gravitation universelle est $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.

3. Champ électrostatique

Comme pour la Terre et le champ de gravitation terrestre, la présence de charge électrique crée un champ électrostatique $\vec{E}$ qui caractérise l'état électrique de l'espace au voisinage de ces charges électriques.

		
Lignes de champ électrostatique créé par une charge ponctuelle $q > 0$	Lignes de champ électrostatique créé par une charge ponctuelle $q < 0$	Champ électrostatique uniforme créé par un condensateur plan

De manière générale, $\vec{E}$ est orienté des charges positives vers les charges négatives.

Dans le cas du condensateur plan, la valeur E (en $V \cdot m^{-1}$) du champ électrostatique est constante et égale à :

$$E = \frac{U_{AB}}{d} \quad \text{avec } U_{AB} \text{ la tension appliquée entre les électrodes en volts (V)} \\ \text{et } d \text{ la distance entre les électrodes en mètres (m).}$$

La force qui s'exerce sur une particule de charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$ a pour expression : $\vec{F} = q\vec{E}$.

On a donc $F = |q|E$ avec F la valeur de la force exercée sur la particule en newtons (N) et q la charge électrique en coulombs (C).

Pour la valeur du champ électrostatique E , on peut donc utiliser soit $V.m^{-1}$, soit $N.C^{-1}$ comme unité du système international (cela ne changera pas sa valeur).

Contrairement à la force d'interaction gravitationnelle qui est toujours attractive, la force d'interaction électrostatique peut être répulsive ou attractive selon le sens de $\vec{E}$ et le signe de q .

Test 4 : Champ électrostatique

Un électron est placé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$ de valeur $E = 300 \text{ N.C}^{-1}$. L'électron est également soumis au champ de pesanteur de valeur $g = 9,8 \text{ N.kg}^{-1}$. La charge élémentaire est $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$, la masse de l'électron est $m = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$.

- 1 Donner les caractéristiques de la force électrique que subit l'électron.
- 2 Donner les caractéristiques du poids de l'électron.
- 3 Comparer les valeurs de deux forces, conclure sur l'influence de chacune sur le mouvement de l'électron.

Test 5 : Champ électrostatique créé par un condensateur plan

On considère un condensateur plan constitué de deux plaques planes parallèles et distantes d'une distance $d = 25 \text{ cm}$. La plaque P_1 est portée au potentiel $V_1 = -200 \text{ V}$. La plaque P_2 est portée au potentiel $V_2 = 300 \text{ V}$.

- 1 Le champ électrostatique $\vec{E}$ entre les plaques est-il uniforme ?
- 2 Quelle est la direction de $\vec{E}$?
- 3 Quel est le sens de $\vec{E}$?
- 4 Quelle est la valeur de $\vec{E}$?



Compléments mathématiques

1. Dérivées de fonctions (séquence n° 2 de mathématiques)

Fonctions polynômes

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

ou encore

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

Fonctions trigonométriques

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{ou encore} \quad \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \text{ou encore} \quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

Fonctions composées : $g[f(x)]' = f'(x) g'[f(x)]$

$$(\cos u)' = -u' \sin u \quad \text{ou encore} \quad \frac{d(\cos u(x))}{dx} = -\frac{du}{dx} \sin u(x)$$

$$(\sin u)' = u' \cos u \quad \text{ou encore} \quad \frac{d(\sin u(x))}{dx} = \frac{du}{dx} \cos u(x)$$

Produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$

2. Primitive des fonctions polynômes (séquence n° 7 de mathématiques)

La fonction F est une primitive de la fonction f si $f = F'$ (nous nous limiterons à des cas très simples) :

Fonction f	Primitive F
$k \quad (k \in \mathbb{Z})$	$kx + \text{constante}$
$k x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$k \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{constante}$

La constante peut être déterminée si on connaît une valeur particulière de F .

Test 6

❶ Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- ▶ $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$
- ▶ $g(t) = \cos(3t+2) - 5\sin(2t)$
- ▶ $h(x) = \cos(3x^2 + 4x + 5)$
- ▶ $k(t) = 3t^2 \cos(2t-4)$

❷ Déterminer la primitive G de la fonction $g(t) = 3t + 2$ vérifiant $G(0) = 4$.

2

Temps et cinématique

A

Objectifs

- ▶ Savoir choisir un référentiel d'étude.
- ▶ Définir et reconnaître des mouvements.
- ▶ Donner les caractéristiques du vecteur accélération de différents mouvements.

B

Pour débiter

1. Introduction : histoire de la mesure du temps

La mesure du temps est une préoccupation bien ancienne liée au développement de l'activité humaine. Dans les premières civilisations, les hommes devaient se repérer dans le temps afin de connaître les moments judicieux pour se livrer à des tâches vitales au rythme des saisons : chasse, pêche, cueillette, activités agricoles (semer, labourer, récolter...). La mesure du temps se basait essentiellement sur les observations des mouvements relatifs de la Lune et du Soleil dans le référentiel terrestre, ce qui a permis la fabrication de calendriers lunaires, luni-solaires ou solaires basés sur, par exemple :

- une année de 360 jours répartis en 12 mois lunaires de 30 jours pour les Babyloniens dès le ^{xii}^e siècle av. J.-C. ;
- une année standard de 365 jours divisée en 12 mois et un « jour intercalaire » ajouté tous les 4 ans pour le calendrier julien introduit par Jules César en -46 et adopté progressivement par les Romains. Il est très proche de celui que nous utilisons de nos jours (calendrier grégorien mis au point au ^{xvi}^e siècle ap. J.-C.).

Très rapidement, l'évolution des sociétés et des activités humaines concertées ont nécessité des mesures du temps de plus en plus fines. Les instruments de mesure ont évolué au cours de l'Histoire. Un des plus anciens est le cadran solaire constitué d'un bâton planté verticalement appelé gnomon et dont l'ombre permet de repérer l'heure au Soleil. Son perfectionnement de l'Antiquité au Moyen Âge en fait un instrument assez fiable dont la précision est inférieure à l'heure, pourvu qu'il y ait du soleil. Un autre instrument qui date de l'Antiquité est la clepsydre ou horloge à eau. Son principe est basé sur l'écoulement d'eau d'un récipient à un autre. Des graduations permettent de mesurer des durées d'écoulement mais sa

précision est aléatoire car la vitesse d'écoulement de l'eau dépend de la température et de la pression. Le sablier souvent associé à l'Antiquité apparaît en réalité plus tardivement, sans doute au ^{viii}e siècle, car il nécessite le savoir-faire d'un verrier pour constituer une enveloppe hermétique. Il est très répandu au Moyen Âge mais sert surtout à mesurer les courtes durées.

Au ^{xii}e siècle apparaissent les premières horloges mécaniques. La chute d'un poids accroché à une corde enroulée autour d'un axe entraîne une aiguille. Les améliorations des horloges vont accroître de façon considérable la précision de la mesure du temps. Notamment au milieu du ^{xviii}e siècle, l'horloge à pendule révolutionne l'horlogerie. Les oscillations régulières d'un pendule servent de base à la mesure du temps. Cela permet une précision accrue et une mesure plus détaillée. C'est à cette époque qu'apparaissent les cadrans tels qu'on les connaît, avec l'aiguille des heures et celle des minutes. L'aiguille des secondes suivra avec les horloges et les montres de plus en plus précises. La révolution industrielle produit des montres et des horloges fiables et en grande quantité. L'avènement du chemin de fer entraîne une uniformité de l'heure dans toute la France.

En 1920, les premières montres à quartz font leur apparition. Le principe est basé sur la piézo-électricité, qui permet d'obtenir des vibrations électriques de périodes stables. Le décalage n'est que d'une seconde sur plusieurs années.

Enfin, des étalons de temps encore plus précis sont obtenus avec les transitions atomiques pour lesquelles la précision est d'une seconde sur plusieurs millénaires. Au cours de l'Histoire, la seconde a été définie de différentes manières.

Au début du ^{xix}e siècle, une seconde est la partie de $\frac{1}{86\,400}$ ^e du jour solaire moyen. Cette définition n'est qu'une valeur moyenne car la durée d'un jour solaire (la durée entre deux passages successifs du Soleil au même méridien) varie au cours de l'année.

En 1956, cette définition n'est plus assez précise, la seconde est alors définie par $\frac{1}{31\,556\,925,9747}$ ^e de la durée de l'année tropique (la durée entre les deux équinoxes de printemps successifs) 1900.

Onze années plus tard, une nouvelle définition est proposée, encore plus précise : la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental de l'atome de césium 133 au repos et à une température de 0 K. C'est la définition actuelle.

Activité 1

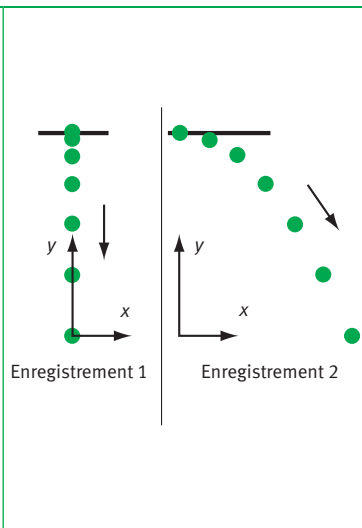
- 1 Quel est le point commun entre les différents phénomènes physiques permettant la mesure du temps ?
- 2 Quelles difficultés ont compliqué la fabrication des calendriers luni-solaires ?
- 3 Donner les valeurs de la fréquence f et de la période correspondant au phénomène définissant actuellement la seconde.

2. Description d'un mouvement

Un enfant se déplace sur un vélo roulant à la vitesse v en tenant une balle à la main ; un premier observateur A roule à ses côtés à la même vitesse ; un deuxième observateur B se trouve sur le trottoir.

L'enfant situé sur le vélo lâche la balle à l'altitude y_0 et à l'abscisse x_0 ; la trajectoire de la balle n'est pas la même pour les deux observateurs.

La balle est filmée par les deux observateurs avec une caméra numérique ; à l'aide d'un logiciel de traitement des images, nous obtenons les enregistrements ci-contre pour lesquels deux images successives de la balle sont prises après une durée constante.



Activité 2



- 1 Identifier les observateurs A ou B de chacun des enregistrements.
- 2 Tracer les trajectoires et décrire la nature des mouvements pour chaque enregistrement.
- 3 Selon quel axe Ox ou Oy du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ lié à la Terre le déplacement de la balle est-il uniforme dans l'enregistrement 2 ? En déduire l'expression du déplacement de la balle selon cet axe en fonction du temps t et de la vitesse du vélo v pour cet enregistrement.
- 4 Pour quelle raison le déplacement de la balle n'est-il pas uniforme selon l'autre axe ? Comment pourrait-on obtenir l'expression du déplacement de la balle selon cet axe en fonction du temps t ?

Le mouvement de la balle dépend de l'observateur choisi comme référence (celui sur le vélo voisin ou celui sur le trottoir). Ce mouvement peut être modifié par les forces qui s'exercent sur la balle. Cette modification peut être mesurée soit en déterminant les changements de valeur et de direction de la vitesse instantanée à chaque instant, soit en mesurant directement l'accélération à l'aide d'un accéléromètre.

Activité 3



Rechercher sur Internet des exemples d'accéléromètre placés dans des appareils que vous pouvez utiliser dans votre vie quotidienne.



Pour apprendre

1. Notion de référentiel

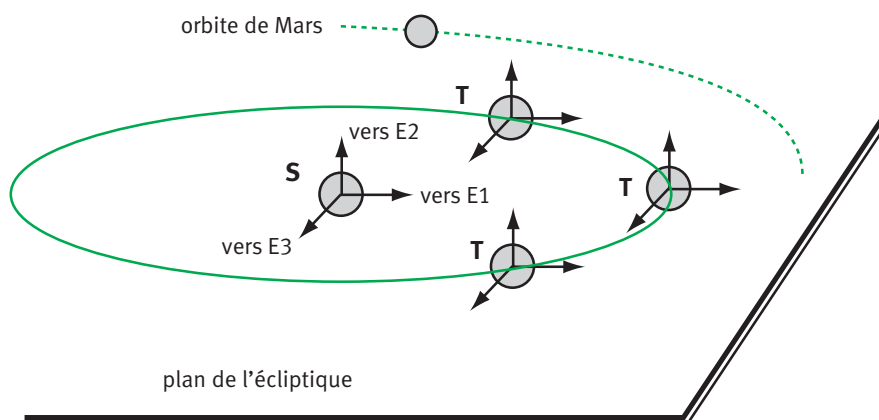
a) Définition

Le mouvement d'un objet dépend du lieu d'observation. Ainsi, une personne assise dans un train est immobile par rapport au sol du train mais se déplace par rapport au sol terrestre. La Terre elle-même est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles et de révolution autour du Soleil. Finalement, quel est le mouvement de cette personne ? Il n'est pas défini dans l'absolu mais toujours par rapport à un objet de référence appelé référentiel.

Un référentiel est un solide de référence à partir duquel est réalisée l'étude d'un mouvement. On associe à ce solide un système de trois axes permettant un repérage de l'espace : le repère d'espace. On associe également un repère de temps avec une date t_0 prise comme origine $t_0 = 0$.

b) Quelques exemples

- Le référentiel terrestre : le solide de référence est un objet fixe à la surface de la Terre. Les trois axes sont dans des directions relatives à l'objet, par exemple : la verticale, l'axe est-ouest, nord-sud... Ce référentiel est adapté à l'étude des mouvements de faible amplitude et de courte durée à la surface de la Terre tels que les mouvements étudiés dans un laboratoire.
- Le référentiel géocentrique : le solide de référence est le centre de la Terre. Les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines notées dans la figure ci-dessous : E1, E2 et E3. Un tel référentiel subit le mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil mais pas le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Il est adapté à l'étude du mouvement des satellites en orbite autour de la Terre.
- Le référentiel héliocentrique : le solide de référence est le centre du Soleil. Les trois axes sont les mêmes que ceux du référentiel géocentrique, dirigées vers E1, E2 et E3. Il est adapté à l'étude des astres en orbite autour du Soleil.



Activité 4



Décrire le mouvement d'une personne assise dans l'herbe dans le référentiel terrestre, géocentrique et héliocentrique.

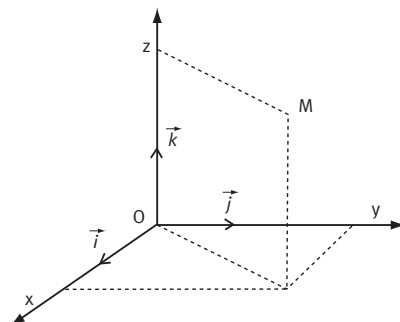
2. Vecteur position

Pour repérer un objet ponctuel M dans l'espace, on utilise les coordonnées cartésiennes x, y, z du repère d'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au référentiel d'étude.

On définit le vecteur position par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Au cours du mouvement de M, les coordonnées x, y, z varient au cours du temps. Pour décrire le mouvement de M, on peut écrire les équations horaires qui donnent les fonctions $x(t), y(t)$ et $z(t)$.



La courbe décrite par M au cours du temps s'appelle la trajectoire de M. Pour déterminer l'équation de la trajectoire à partir des équations horaires, il faut trouver l'équation qui relie x, y et z en éliminant la variable temps t .

Activité 5



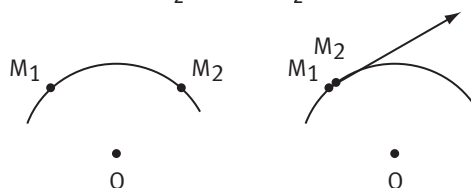
Un point M a pour équations horaires $x(t) = 3t + 2$, $y(t) = -t + 8$ et $z(t) = 1$.

x, y et z sont exprimés en m et t en s.

- ❶ Décrire la trajectoire du point M.
- ❷ Quelle est la distance du point O au point M à la date $t = 2,0$ s ?

3. Vecteur vitesse

On suppose que le point M dont on étudie le mouvement se trouve à la position M_1 à la date t_1 et à la position M_2 à la date t_2 .



La vitesse moyenne du point M entre les dates t_1 et t_2 est $v_m = \frac{\overline{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$. Si on sou-

haite connaître la vitesse instantanée au point M_1 , il faut que l'intervalle $t_2 - t_1$

soit très réduit. Ainsi, la vitesse instantanée a pour valeur $v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\overline{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$. Vectoriellement, on définit alors la vitesse par :

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\overline{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\overline{M_1O} + \overline{OM_2}}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\overline{OM_2} - \overline{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

La vitesse est donc dirigée tangentiellement à la trajectoire et orientée dans le sens du mouvement.

Elle représente la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps. On note

ceci $\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$.

Puisque $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et comme les vecteurs unitaires des axes sont constants au cours du temps, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$$

où x , y et z sont des fonctions du temps et $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ leur dérivée respective par rapport au temps.

- $\frac{dx}{dt}$ représente la coordonnée du vecteur vitesse selon l'axe Ox. On note

$$\frac{dx}{dt} = v_x.$$

- $\frac{dy}{dt}$ représente la coordonnée du vecteur vitesse selon l'axe Oy. On note

$$\frac{dy}{dt} = v_y.$$

- $\frac{dz}{dt}$ représente la coordonnée du vecteur vitesse selon l'axe Oz. On note

$$\frac{dz}{dt} = v_z.$$

Donc $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

Propriétés du vecteur vitesse $\vec{v}$:

– direction tangente au mouvement

– sens dans le sens du mouvement

– norme égale à la valeur de la vitesse instantanée en m.s^{-1} à l'instant t

soit $\vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Rappel

$$1 \text{ m.s}^{-1} = 3,6 \text{ km.h}^{-1}.$$

Activité 6



Un point mobile M se déplace dans l'espace en suivant les équations horaires suivantes :

$$x(t) = 3t, y(t) = -4,9t^2 + t \text{ et } z(t) = 0.$$

x , y et z sont exprimés en m et t en s.

- 1 Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse au cours du temps.
- 2 Quelle est la valeur de la vitesse à $t = 2 \text{ s}$?

4. Vecteur accélération

On vient de voir que le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position. L'accélération mesure la variation de la vitesse au cours du temps. Il s'agit de la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse.

On note le vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Donc l'accélération s'écrit $\vec{a} = \vec{k} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$

ou en fonction des coordonnées $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$

avec $\frac{d^2x}{dt^2}$ la dérivée seconde de x par rapport au temps (de même pour les autres coordonnées).

- $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$ représente la coordonnée du vecteur accélération selon l'axe Ox, notée a_x .
- $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}$ représente la coordonnée du vecteur accélération selon l'axe Oy, notée a_y .
- $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt}$ représente la coordonnée du vecteur accélération selon l'axe Oz, notée a_z .

Donc $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

La valeur a de l'accélération est la norme du vecteur $\vec{a}$, soit $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Elle s'exprime en m.s-2.

Activité 7



On reprend le même mouvement que dans l'activité 5 du paragraphe précédent : $x(t) = 3t + 2$, $y(t) = -t + 8$ et $z(t) = 1$.

Déterminer l'expression du vecteur accélération. En déduire sa valeur.

5. Étude de quelques mouvements particuliers

a) Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est rectiligne si la trajectoire est une droite (ou la partie d'une droite). Un mouvement est uniforme si la valeur de la vitesse est constante.

On étudie un point M animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Pour l'étude d'un tel mouvement, on fait coïncider l'axe Ox avec la trajectoire. Ainsi, seule la

variable x varie au cours du temps, $y(t) = 0$ et $z(t) = 0$. Donc v_y et v_z sont également nuls.

On a donc $\vec{v} = v_x \vec{i}$ et $v = \sqrt{v_x^2} = |v_x| = v_x$ si l'axe Ox est dirigé dans le sens du mouvement.

Comme le mouvement est uniforme, $v_x = \text{constante}$. Le vecteur vitesse est un vecteur constant.

Donc l'accélération est nulle.

Pour un mouvement rectiligne uniforme, l'accélération est nulle $\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$.

Si Ox est dirigé dans le sens du mouvement, $v = v_x = \frac{dx}{dt}$

Donc, en intégrant, $x(t) = v \times t + x_0$ avec x_0 : abscisse du point M à $t = 0$ s.

Activité 8



Un point M est animé d'un mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe Ox à la vitesse $v = v_x = 2,5 \text{ m.s}^{-1}$. À la date $t = 3,0$ s, le point M est en $x = 7,5$ m. Déterminer la position x_0 du point M à la date $t = 0$ s.

b) Mouvement circulaire uniforme

Un mouvement est circulaire si la trajectoire est un cercle (ou un arc de cercle).

Le mouvement est uniforme, donc la valeur de la vitesse est constante mais la direction du vecteur vitesse varie. Ainsi, $v = \text{constante}$ mais $\vec{v} \neq \text{constante}$.

Puisque $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ alors $\vec{a}$ n'est pas nulle.

Un mouvement circulaire uniforme possède une accélération non nulle.

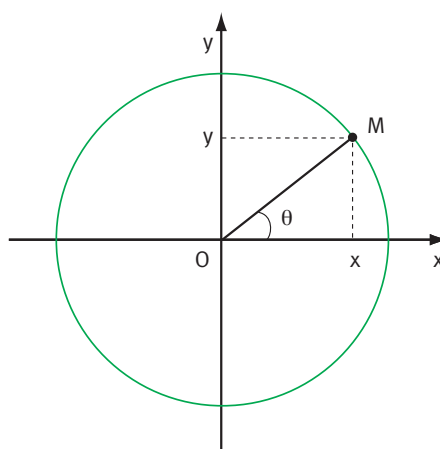
Déterminons les caractéristiques de cette accélération :

On considère un point M animé d'un mouvement circulaire uniforme centré en O et de rayon $OM = R$.

À $t = 0$ s, le point M est sur l'axe Ox .

À une date $t \neq 0$ s, le point M est repéré par l'angle θ (voir figure ci-contre). Le mouvement est uniforme, donc l'angle θ croît linéairement au cours du temps : $\theta = \omega \times t$, avec ω une constante.

D'après la figure ci-contre, à une date t :



$$x(t) = R \cos \theta = R \cos(\omega \times t)$$

$$y(t) = R \sin \theta = R \sin(\omega \times t)$$

$$\text{d'où } v_x = \frac{dx}{dt} = -R \omega \sin(\omega \times t) \quad \text{et } v_y = \frac{dy}{dt} = R \omega \cos(\omega \times t)$$

L'accélération a donc pour coordonnées :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R \omega^2 \cos(\omega \times t), \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -R \omega^2 \sin(\omega \times t)$$

On remarque que $\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$, donc l'accélération est dirigée dans la même direction mais en sens opposé au vecteur position. **Elle est donc dirigée de M vers O, vers le centre de la trajectoire. On dit que l'accélération est centripète.**

De plus, si on calcule les valeurs de la vitesse et de l'accélération :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2 \omega^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))} = R\omega$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{R^2 \omega^4 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = R \omega^2$$

On remarque que $a = \frac{v^2}{R}$.

Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète et sa valeur est :

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Remarque

La grandeur ω introduite s'appelle la vitesse angulaire. Elle s'exprime en rad.s^{-1} .

Activité 9



Déterminer les caractéristiques (direction, sens et valeur) du vecteur accélération d'un point M se situant en bordure d'un CD lors du fonctionnement du lecteur. Le CD a un rayon $R = 6,0 \text{ cm}$ et la vitesse de rotation du disque est constante de valeur 500 tours par minute.

c) Mouvement rectiligne uniformément varié

Un mouvement est uniformément varié si l'accélération est constante. De plus, s'il est rectiligne, alors le mouvement n'a lieu que selon une seule direction. On supposera que cette direction est l'axe Ox.

On a donc $\vec{a} = a_x \vec{i}$ avec $a_x = \text{constante}$.

Puisque $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, on trouve v_x en intégrant a_x par rapport au temps. Soit $v_x = a_x \times t + C$.

C est la constante d'intégration, c'est la valeur de v_x à $t = 0 \text{ s}$. On la notera v_{0x} .

On a donc $v(t) = a_x \times t + v_{0x}$.

Pour connaître l'équation horaire $x(t)$, il faut intégrer $v_x(t)$ par rapport au temps. On obtient :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0$$

Là encore, x_0 est la constante d'intégration et est égale à la valeur de x à $t = 0 \text{ s}$.

Activité 10



Soit un point mobile M subissant une accélération constante telle que : $\vec{a} = a_x \vec{i}$ avec $a_x = 4,0 \text{ m.s}^{-2}$.

On suppose qu'à $t = 0 \text{ s}$, le point M est immobile en O.

Déterminer la distance d parcourue par M à la date $t = 5,0 \text{ s}$.



Pour conclure

1. Résumé du chapitre

Un point M est repéré par son vecteur position $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

La vitesse d'un point M est définie par $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$.

Ce vecteur a pour expression $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

Propriétés du vecteur vitesse $\vec{v}$:

- direction tangente au mouvement.
- sens dans le sens du mouvement.
- norme égale à la valeur de la vitesse instantanée en m.s^{-1} à l'instant t soit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

L'accélération d'un point M est définie par $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Le vecteur accélération a pour coordonnées $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

La norme du vecteur accélération est égale à la valeur de l'accélération instantanée en m.s^{-2} à l'instant t soit : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Un mouvement est rectiligne uniforme si l'accélération est nulle.

Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète (perpendiculaire à la trajectoire et orientée vers le centre du cercle) et a pour valeur :

$$a = \frac{v^2}{R} \text{ où } R \text{ est le rayon de la trajectoire.}$$

Pour un mouvement rectiligne uniformément varié, l'accélération est constante en valeur et en direction dans la direction du mouvement.

2. Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Mouvement à la surface de la Terre

On considère un objet de masse m situé sur l'équateur à la surface de la Terre. Le système est immobile dans le référentiel terrestre.

- 1 Décrire le mouvement du système dans le référentiel géocentrique.
- 2 Quelle est la vitesse du système dans ce même référentiel ?
- 3 En déduire les caractéristiques de son accélération.

Exercice 2 Accélération d'une moto

On considère un motard qui s'élance, avec une vitesse initiale nulle, sur une piste rectiligne d'axe Ox en maintenant une accélération constante.

Sont représentées ci-dessous les évolutions au cours du temps de la valeur v de la vitesse du motard (figure 1) et la distance d qu'il parcourt (figure 2).

Figure 1 : valeur v de la vitesse du système en fonction du temps

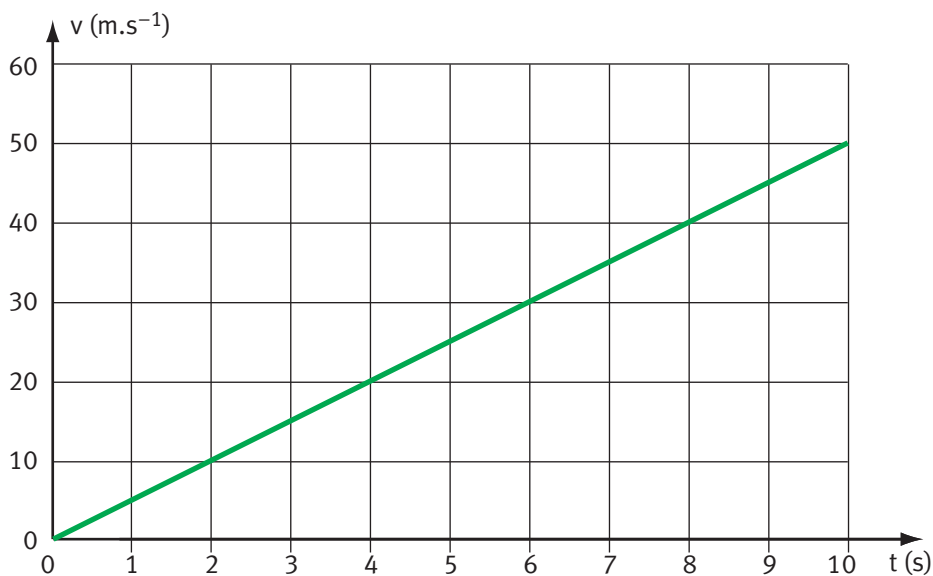
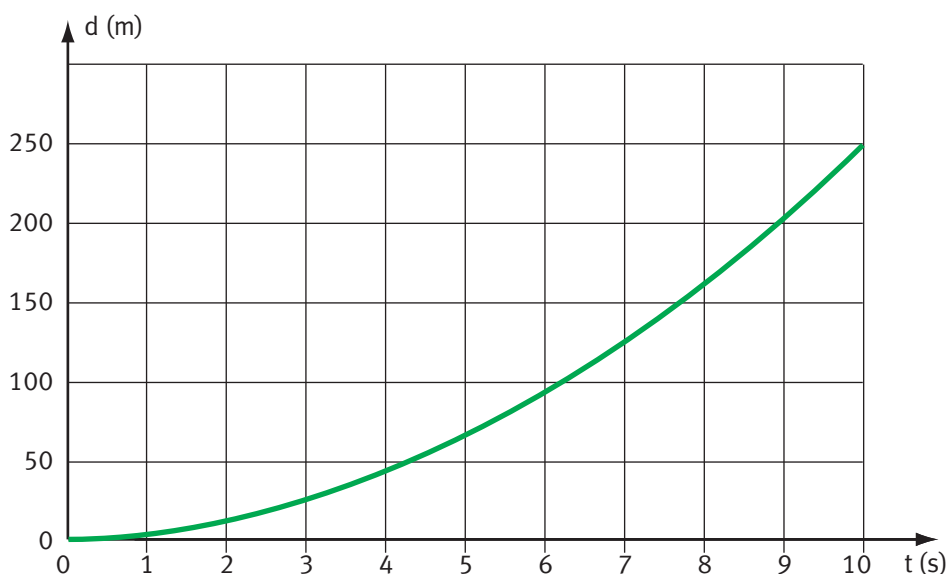


Figure 2 : distance d parcourue par le système en fonction du temps



- ❶ En utilisant la figure 2 et la figure 3, déterminer la distance parcourue par le motard lorsque celui-ci a atteint une vitesse de 160 km.h^{-1} .
- ❷ Montrer que la courbe donnée en figure 2 permet d'affirmer que la valeur de l'accélération est constante. Donner sa valeur.
- ❸ Donner les expressions vectorielles de la vitesse et du vecteur position en fonction du temps.

Exercice 3 Mouvement d'un palet

On filme le mouvement d'un palet lancé à l'aide d'un système à ressort. Le film est ensuite exploité avec un logiciel adapté.

La figure 1 suivante présente la position qu'occupe le centre d'inertie G du palet à intervalles de temps réguliers $\tau = 20,0 \text{ ms}$ (points G_0 à G_5) à $t = 0 \text{ s}$, le centre d'inertie du palet est au point O ou G_0 .

Figure 1 : position du centre d'inertie du palet (échelle 1)



- ❶ En supposant que la vitesse instantanée en un point G_i est égale à la vitesse moyenne entre les points G_{i-1} et G_{i+1} , déterminer à partir de la figure les approximations des vitesses V_{G2} et V_{G4} du palet aux points G_2 et G_4 .
- ❷ En supposant que l'accélération est constante entre G_2 et G_4 , donner une approximation du vecteur accélération $\vec{a}_{G3}$ du palet au passage du point G_3 en fonction des vitesses $\vec{V}_{G4}$ et $\vec{V}_{G2}$ et de l'intervalle de temps τ .
- ❸ En déduire la valeur de cette accélération a_{G3} .

3

Les lois de Newton

A

Objectifs

- Connaître et appliquer les lois de Newton pour étudier différentes situations en mécanique.
- Définir la quantité de mouvement d'un point matériel.
- Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour étudier un mouvement.

B

Pour débiter

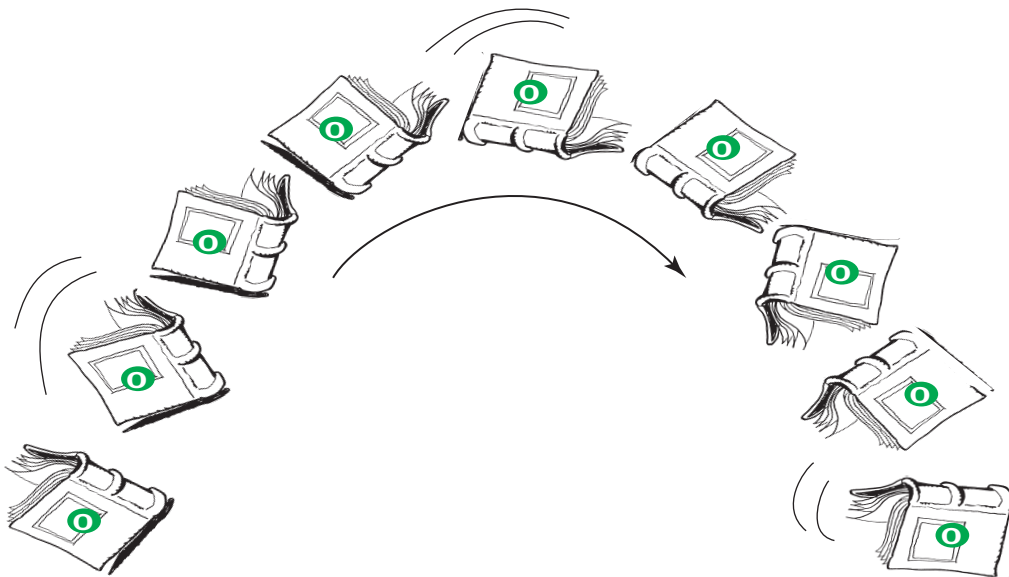
1. Centre d'inertie d'un système

Lorsque nous étudierons le mouvement de solides ou de systèmes non ponctuels, nous considérerons le mouvement de leur centre d'inertie défini de la manière suivante : c'est le point du système ayant le mouvement de plus simple. Il correspond au centre d'un solide homogène.

Activité 11



Si on considère l'enregistrement du mouvement d'un livre lancé dans le champ de pesanteur, chaque point de ce livre aura une trajectoire différente des autres selon la manière dont on l'aura lancé. Par contre, son centre d'inertie aura une trajectoire simple que vous avez déjà rencontrée en mathématique. À l'aide de l'enregistrement suivant (voir page 215), tracez la trajectoire du centre d'inertie du livre dont chaque position est repérée par un ① et faites une hypothèse sur le type d'équation mathématique de la trajectoire du centre d'inertie du livre.



2. Effet d'une force constante sur le centre d'inertie d'un système

On dispose au laboratoire d'un mobile autoporteur sur coussin d'air. Ce dernier permet d'atténuer fortement les frottements et ainsi de les négliger face aux autres forces. Il est placé sur une table horizontale.

Le mobile est doté d'un dispositif qui permet de marquer à intervalles de temps réguliers sur la table la position M du centre d'inertie du mobile.

La masse du mobile est $m = 0,95 \text{ kg}$.

À la date $t = 0 \text{ s}$, on lance le mobile ; on obtient l'enregistrement des positions M de son centre d'inertie suivant :

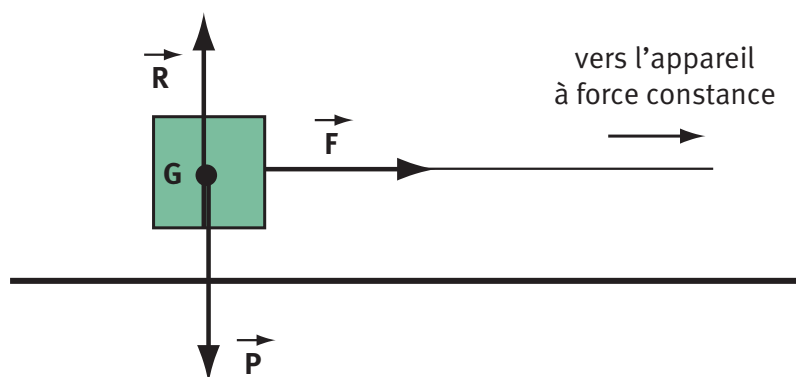
+ + + + + + + +

Activité 12



Quel est le mouvement du mobile autoporteur sur la table ? Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur le mobile. Quel renseignement sur ces forces l'étude du mouvement nous apporte-t-elle ?

On relie à présent le mobile à un appareil à force constante. Celui-ci exerce une force de valeur $F = 1,5 \text{ N}$ sur le mobile par l'intermédiaire d'un fil dont la direction horizontale reste constante au cours du déplacement.



À $t = 0$ s, on lâche sans vitesse initiale le mobile sur la table. On obtient l'enregistrement qui a l'allure suivante :

++ + + + + + + +

Activité 13



- ❶ Quel est le mouvement du centre d'inertie du mobile autoporteur ?

On mesure la distance parcourue x depuis le premier point de l'enregistrement. On sait qu'entre deux positions successives la durée est $\Delta t = 0,10$ s. On obtient le tableau de mesures suivant :

x (cm)	0	0,8	3,2	7,1	12,6	19,7	28,4	38,7
Date t (s)	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70

Les valeurs sont traitées avec un logiciel de traitement des données.

- ❷ On souhaite connaître la valeur v de la vitesse aux différentes dates. Quelle opération doit-on faire à l'ordinateur ?

On affiche le graphe représentant v au cours du temps. On obtient une droite qui passe par l'origine.

- ❸ Que représente le coefficient directeur de cette droite ?

Après modélisation, l'ordinateur propose $v = 1,58 \times t$ (avec t en s et v en m.s^{-1}).

- ❹ En déduire la valeur a de l'accélération du centre d'inertie du mobile.

- ❺ Comparer le produit de la masse m du mobile par l'accélération ($m \times a$) avec F . Conclure.



Pour apprendre

1. La quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un système de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}$ est la grandeur définie par : $\vec{p} = m\vec{v}$

La quantité de mouvement dépend donc du référentiel d'étude.

2. Les lois de Newton

a) Première loi de Newton ou principe d'inertie

Un corps peut-il être en mouvement sans qu'il ne soit soumis à aucune force ?

Contrairement aux apparences, Newton (1642-1727) considérait qu'un corps pouvait rester indéfiniment en mouvement sans qu'aucune force ne s'exerce sur lui et avait énoncé le principe d'inertie. Cependant, à la surface de la Terre, tous les corps sont soumis à une force exercée par la Terre qui s'appelle le poids ainsi qu'aux frottements de l'air ; on n'observe pas facilement de mouvement sans force exercée sur un corps à la surface de la Terre.

La première loi de Newton est souvent appliquée au centre d'inertie de la manière suivante.

Le centre d'inertie d'un système mécaniquement isolé se comporte de la manière suivante :

- s'il est immobile, il reste immobile,
- s'il est en mouvement, il est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Le principe d'inertie ne s'applique que dans des référentiels galiléens.

Lorsque les forces qui agissent sur un corps se compensent ($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$), son mouvement sera identique à celui d'un corps qui n'est soumis à aucune force.

Dans un référentiel galiléen, si la somme des forces extérieures exercées sur un système est nulle, alors son centre d'inertie est soit immobile, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, et réciproquement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_G = c\vec{e}$$

Cette loi permet de définir un référentiel galiléen. C'est un référentiel dans lequel on suppose la première loi de Newton exacte.

En effet, observons un objet immobile devant nous dans une automobile immobile dans le référentiel terrestre que nous supposons galiléen. Lorsque le véhicule accélère, nous observons que l'objet a un mouvement vers l'arrière dans le référentiel de l'automobile alors qu'aucune force nouvelle ne s'exerce sur lui. En fait, l'objet tend à garder sa position de repos dans le référentiel terrestre : c'est le référentiel de l'automobile qui n'est plus galiléen car il est en accélération par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen...

En réalité, c'est toujours une approximation : il n'existe pas de référentiel galiléen absolu. La Terre subit des accélérations dans le référentiel héliocentrique et même le Soleil subit une accélération si on prend comme référentiel le centre de la galaxie...

En pratique, pour les mouvements couramment observés dans le laboratoire, on supposera le référentiel terrestre galiléen. Par contre, pour les mouvements des planètes et des satellites, il conviendra de choisir soit le référentiel géocentrique, soit le référentiel héliocentrique.

b) Deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures exercées sur un système est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Si la masse du système est constante, alors $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$. La deuxième loi de Newton s'écrit pour un système de masse constante : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$. $\vec{a}$ est l'accélération du centre d'inertie du système

Remarque

Si la somme des forces qui s'exercent sur le système est nulle, on retrouve évidemment la première loi de Newton qui est un cas particulier de la seconde.

Méthode d'application de la deuxième loi de Newton

- ▶ Définir le système.
- ▶ Préciser le référentiel galiléen (ou considéré comme galiléen) utilisé.
- ▶ Faire le bilan des forces extérieures non négligeables appliquées au système.
- ▶ Écrire la deuxième loi de Newton appliquée au centre d'inertie.
- ▶ Exploiter la relation vectorielle obtenue en projetant dans un repère pour obtenir des relations non vectorielles.
- ▶ Si besoin, intégrer les relations obtenues pour obtenir les équations horaires du mouvement puis l'équation de la trajectoire.

c) Troisième loi de Newton

Étant donné deux points matériels A et B en interaction, soit $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ la force exercée par A sur B et soit $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ la force exercée par B sur A ; au même instant, les forces $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ sont telles que :

$\vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{B \rightarrow A} = \vec{0}$; ces deux vecteurs force ont la même droite d'action.

La relation vectorielle $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$ signifie que les deux vecteurs force sont opposés et que ces forces ont même valeur.

Remarques

1. Ce principe n'est valable en toute rigueur que pour des points matériels mais nous pourrions l'utiliser par la suite pour tous les solides en interaction rencontrés dans ce cours.
2. On reconnaît deux solides en interaction si le mouvement ou l'état de repos de l'un dépend de la présence de l'autre : chacun des deux solides exerce sur l'autre une force égale en valeur, de même direction mais de sens opposé. L'interaction gravitationnelle est un bon exemple mettant en jeu des solides en interaction (voir paragraphe B5 des prérequis).

3. Application au mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

Le système étudié est un point mobile M de masse m. Le système est plongé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ uniforme. On suppose que le système est en chute libre : il n'est soumis qu'à son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

a) Application de la deuxième loi de Newton

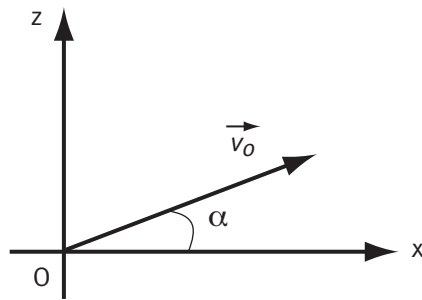
L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre.

La seconde loi de Newton s'écrit $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$. Donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Dans le cas d'une chute libre, le vecteur accélération est toujours égal au champ de pesanteur.

b) Équations horaires

On choisit un repère d'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au référentiel tel que à $t = 0$ s, M se situe en O. L'axe Oz est vertical ascendant et la vitesse à $t = 0$ s, $\vec{v}_0$ est dans le plan (xOz). L'axe Ox a la même orientation que $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_0$ fait un angle α avec ce dernier (voir schéma ci-contre). L'axe Oy est perpendiculaire au plan de la figure.



$\vec{a} = \vec{g}$ (l'accélération est constante, le mouvement est uniformément varié), donc les coordonnées de $\vec{a}$ sont :

- $a_x = 0$ ($\vec{g}$ perpendiculaire à Ox),
- $a_y = 0$ ($\vec{g}$ perpendiculaire à Oy),
- $a_z = -g$ ($\vec{g}$ colinéaire à Oz et dirigé vers le bas).

En intégrant chaque coordonnée de l'accélération par rapport au temps, on obtient les coordonnées de la vitesse $\vec{g}$:

- $v_x = \text{constante} = v_{0x}$ (la projection de $\vec{g}$ sur Ox à $t = 0$ s) donc $v_x = v_0 \times \cos\alpha$
- $v_y = \text{constante} = v_{0y}$ (la projection de $\vec{v}$ sur Oy à $t = 0$ s) donc $v_y = 0$
- $v_z = -gt + \text{constante}$ (la constante est v_{0z} la projection de $\vec{v}_0$ sur Oz à $t = 0$ s, c'est-à-dire $v_0 \times \sin\alpha$)

$$\text{donc } v_z = -gt + v_0 \times \sin\alpha.$$

En intégrant chaque coordonnée de la vitesse par rapport au temps, on obtient les coordonnées du vecteur position :

- $x(t) = v_0 \times \cos \alpha \times t + x_0$ (la constante x_0 est x à $t = 0$ s, c'est-à-dire 0) donc $x(t) = v_0 \times \cos \alpha \times t$
- $y(t) = y_0 = 0$
- $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \times \sin \alpha \times t + z_0$ avec $z_0 = 0$ d'où $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \times \sin \alpha \times t$.
 $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ représentent les équations horaires du mouvement de chute libre.

On remarque $y(t) = 0$. Il n'y a aucun mouvement selon cette direction. Le mouvement est contenu dans le plan (xOz) .

c) Équation de la trajectoire

Ici, il s'agit de l'équation de la courbe représentant $z = f(x)$.

D'après $x(t) = v_0 \times \cos \alpha \times t$, on peut écrire $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ (on suppose v_0 et $\cos \alpha$ différents de 0). On remplace l'expression de t dans l'équation horaire $z(t)$ obtenue précédemment : on a alors $z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 + x \tan \alpha$: il s'agit de

l'équation de la trajectoire. C'est l'équation d'une parabole de concavité tournée vers le bas (vers les z décroissants).

Remarque

Si $v_0 = 0$ ou $\cos \alpha = 0$ (dans ce cas, $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ le tir est vertical), alors on a $x(t) = v_0 \times \cos \alpha \times t = 0$. Il n'y a pas de mouvement selon Ox . La chute libre est verticale. Le mouvement a lieu selon Oz . La trajectoire est une droite. L'équation horaire est alors :

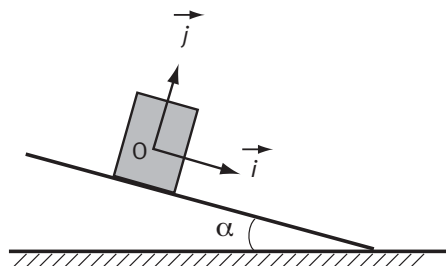
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \times \sin \alpha \times t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \times t$$

Activité 14



Un objet de masse m se déplace sans frottement sur un plan incliné (l'objet descend) ; ce plan est incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal.

- 1 Exprimer les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie. (On donnera la valeur de $\vec{a}_G$, en fonction de g et α .)



- 2 Déterminer les équations horaires du mouvement dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ lié au référentiel terrestre. Au début du mouvement, l'objet est lâché en O avec une vitesse nulle.

- 3 Quelle distance l'objet aura-t-il parcourue après 1,5 seconde ?

Données $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$; $m = 10 \text{ kg}$; $\alpha = 30^\circ$

4. Application au mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

On étudie le mouvement d'une particule M, supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m . La région de l'espace dans laquelle l'étude a lieu est plongée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$.

a) Application de la deuxième loi de Newton

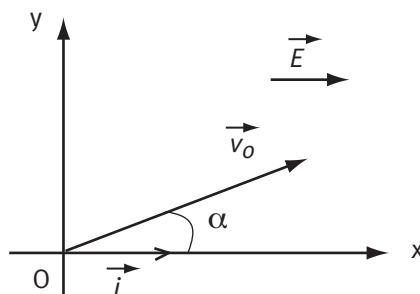
L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre.

La particule est soumise à deux forces :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$.

Dans le cas (voir activité 12) où le poids est négligeable devant la valeur de la force électrostatique, la seconde loi de Newton s'écrit $\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E}$.

Donc $\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$.



b) Équations horaires

On choisit un repère d'espace $(O; \vec{i}, \vec{j})$ lié au référentiel terrestre tel que à $t = 0 \text{ s}$, M se situe en O. L'axe Ox est choisi quel que soit le champ électrique selon cet axe : $\vec{E} = E\vec{i}$. L'axe Oy est tel que la vitesse à $t = 0 \text{ s}$, $\vec{v}_0$ soit dans le plan (xOy). L'axe Oy a la même orientation que $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_0$ fait un angle α avec l'axe Ox (voir le schéma). L'axe Oz est perpendiculaire au plan de la figure.

$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$ (l'accélération est constante, le mouvement est uniformément varié)

Les coordonnées de $\vec{a}$ sont :

- $a_x = \frac{q}{m} E$ ($\vec{E}$ colinéaire à Ox),
- $a_y = 0$ ($\vec{E}$ perpendiculaire à Oy),
- $a_z = 0$ ($\vec{E}$ perpendiculaire à Oz),

En intégrant chaque coordonnée de l'accélération par rapport au temps, on obtient les coordonnées de la vitesse $\vec{v}$:

- $v_x = \frac{q}{m} E \times t + \text{constante}$

La constante est v_{0x} la projection de $\vec{v}_0$ sur Ox à $t = 0$ s, c'est-à-dire $v_0 \times \cos \alpha$.

$$\text{donc } v_x = \frac{q}{m} E \times t + v_0 \times \cos \alpha.$$

- $v_y = \text{constante} = v_{0y}$ (la projection de $\vec{v}_0$ sur Oy à $t = 0$ s) donc $v_y = v_0 \times \sin \alpha$.
- $v_z = \text{constante} = v_{0z}$ (la projection de $\vec{v}_0$ sur Oz à $t = 0$ s) donc $v_z = 0$.

En intégrant chaque coordonnée de la vitesse par rapport au temps, on obtient les coordonnées du vecteur position :

- $x(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \times t^2 + v_0 \cos \alpha \times t + x_0$ avec $x_0 = 0$

$$\text{d'où } x(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \times t^2 + v_0 \cos \alpha \times t$$

- $y(t) = v_0 \times \sin \alpha \times t + y_0$ avec $y_0 = 0$ donc $y(t) = v_0 \times \sin \alpha \times t$
- $z(t) = z_0 = 0$

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ représentent les équations horaires du mouvement.

On remarque $z(t) = 0$. Il n'y a aucun mouvement selon cette direction. Le mouvement est contenu dans le plan (xOy).

c) Équation de la trajectoire

Ici, il s'agit de l'équation de la courbe représentant $x = f(y)$.

D'après $y(t) = v_0 \times \sin \alpha \times t$, on peut écrire $t = \frac{y}{v_0 \sin \alpha}$ (on suppose v_0 et $\sin \alpha$ différents de 0). On remplace l'expression de t dans l'équation horaire $x(t)$ obtenue précédemment.

On a alors $x(y) = \frac{qE}{2mv_0^2 \sin^2 \alpha} y^2 + \frac{y}{\tan \alpha}$: il s'agit de l'équation de la trajectoire.

C'est l'équation d'une **parabole**.

Remarque

Si $v_0 = 0$ ou $\sin \alpha = 0$ (dans ce cas la vitesse initiale est selon Ox), alors on a :

$y(t) = v_0 \times \sin \alpha \times t = 0$. Il n'y a pas de mouvement selon Oy. Le mouvement a lieu selon Ox. La trajectoire est une droite. L'équation horaire est alors

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \times t^2 + v_0 \cos \alpha \times t = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \times t^2 + v_0 \times t \quad (\cos \alpha = 1)$$

Activité 15

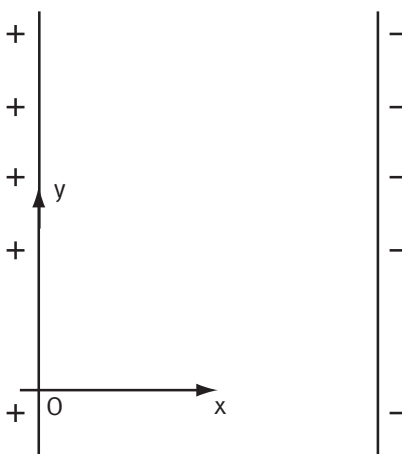


On considère un proton placé au niveau de l'électrode négative d'un condensateur plan dont les armatures, écartées de 10 cm, sont soumises à une tension de 1V.

- 1 Montrer que la valeur du poids P est négligeable devant la valeur de la force électrostatique F exercée dans le condensateur.
- 2 Si le proton à l'instant initial, sans vitesse initiale, est situé au centre O d'un repère Oxy dont l'axe Ox est perpendiculaire aux armatures du condensateur, en combien de temps aura-t-il parcouru la distance de 10 cm séparant les armatures du condensateur.

Données

$g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$ masse du proton : $m = 1,67.10^{-27} \text{ kg}$
charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$



Pour conclure

1. Résumé du chapitre

La quantité de mouvement d'un système de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}$ est la grandeur définie par :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- La première loi de Newton (ou principe d'inertie) est :

Dans un référentiel galiléen, si la somme des forces extérieures exercée sur un système est nulle, alors son centre d'inertie est soit immobile, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, et réciproquement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \vec{v}_G = cte.$$

- La deuxième loi de Newton est :

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures exercée sur un système est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Si la masse du système est constante, alors $= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$. La deuxième loi de Newton s'écrit pour un système de masse constante : $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}$. $\vec{a}$ est l'accélération du centre d'inertie du système.

- La troisième loi de Newton (ou principe des actions réciproques) est :

Soit A et B deux points en interaction. La force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ exercée par A sur B et la force $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ exercée par B sur A sont telles que : $\vec{F}_{A \rightarrow B} = - \vec{F}_{B \rightarrow A}$

Le mouvement d'un objet en chute libre s'étudie en appliquant la seconde loi de Newton.

- Pour une chute libre $\vec{a} = \vec{g}$

Les équations horaires de la vitesse $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ sont obtenues en déterminant les primitives des composantes de l'accélération a_x , a_y , a_z et en tenant compte des conditions initiales.

Les équations horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont obtenues en déterminant les primitives des composantes de la vitesse $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ et en tenant compte des conditions initiales.

L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant la variable temps t des équations horaires du mouvement. C'est l'équation d'une parabole.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme s'étudie en appliquant la seconde loi de Newton.

Comme le poids est généralement négligeable devant la force électrostatique :

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

Les équations horaires de la vitesse et du mouvement ainsi que l'équation de la trajectoire sont déterminées avec une méthode identique à celle utilisée lors de l'étude de la chute libre.

On retrouve, pour l'équation de la trajectoire, l'équation d'une parabole.

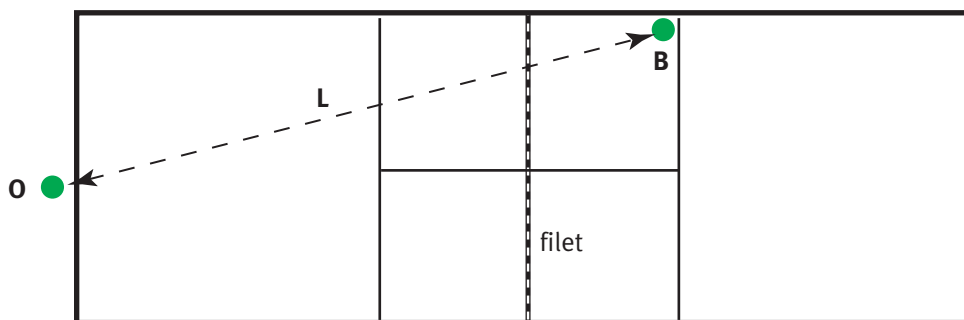
2. Exercices d'apprentissage

Exercice 4 Un service au tennis

Un terrain de tennis est un rectangle de longueur 23,8 m et de largeur 8,23 m. Il est séparé en deux dans le sens de la largeur par un filet dont la hauteur est 0,920 m.

Lorsqu'un joueur effectue un service, il doit envoyer la balle dans une zone comprise entre le filet et une ligne située à 6,40 m du filet.

On étudie un service du joueur placé au point O.



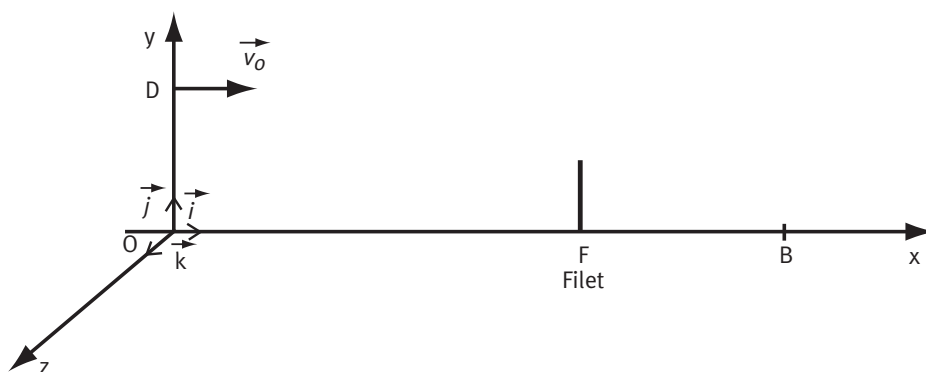
Ce joueur souhaite que la balle frappe le sol en B tel que $OB = L = 18,7 \text{ m}$.

Pour cela, il lance la balle verticalement et la frappe avec sa raquette en un point D situé sur la verticale de O à la hauteur $H = 2,20 \text{ m}$.

La balle part alors de D avec une vitesse de valeur $v_0 = 126 \text{ km.h}^{-1}$, horizontale, comme le montre le schéma ci-dessous.

La balle de masse $m = 58,0 \text{ g}$ sera considérée comme ponctuelle et on considérera que l'action de l'air est négligeable.

L'étude du mouvement sera faite dans le référentiel terrestre, galiléen, dans lequel on choisit un repère Oxyz comme l'indique le schéma ci-dessous :



1 Équations horaires paramétriques et trajectoire

1.1. Faire le bilan des forces appliquées à la balle pendant son mouvement entre D et B.

En indiquer les caractéristiques (direction, sens, grandeur) et l'expression.

1.2. Établir l'expression du vecteur accélération de la balle au cours de son mouvement.

1.3. Montrer que les équations horaires paramétriques du mouvement de la balle sont :

$$x(t) = v_0 t \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + H \quad z(t) = 0$$

1.4. Montrer que le mouvement de la balle a lieu dans un plan.

1.5. Dédire de la réponse à la question 1.3. l'équation littérale de la trajectoire de la balle dans le plan xOy.

② Qualité du service

Donnée $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

- 2.1. Sachant que la distance $OF = 12,2 \text{ m}$, la balle, supposée ponctuelle, passe-t-elle au-dessus du filet ?
- 2.2. Montrer que le service sera considéré comme mauvais, c'est-à-dire que la balle frappera le sol en un point B' tel que OB' soit supérieur à OB .
- 2.3. En réalité, la balle tombe en B . Quel est le paramètre, non pris en compte dans ce problème, qui peut expliquer cette différence ?

Exercice 5 Mouvement d'un électron

Un électron de masse m et de charge $-e$ pénètre en O avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans une région de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$ uniforme. $\vec{v}_0$ est dirigée selon l'axe (Ox) alors que $\vec{E}$, lui, est perpendiculaire selon l'axe (Oy) .

Données $m = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$, $E = 2,0.10^3 \text{ N.C}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

- ① Comparer la valeur du poids de l'électron et la valeur de la force électrostatique. Conclure.
- ② Établir les équations horaires du mouvement de l'électron.
- ③ En déduire l'équation de trajectoire de l'électron dans le plan xOy .
- ④ Quelle est la nature de la trajectoire ?
- ⑤ Lorsque l'abscisse de l'électron est $x_L = L$, l'électron quitte la région de l'espace où règne le champ électrique. Déterminer l'expression de l'ordonnée y_L lorsque $x_L = L$.
- ⑥ Quelle est, par la suite, la nature du mouvement de l'électron ?

4

Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé

A

Objectif

- Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour interpréter un mode de propulsion par réaction à l'aide d'un bilan qualitatif de quantité de mouvement.

B

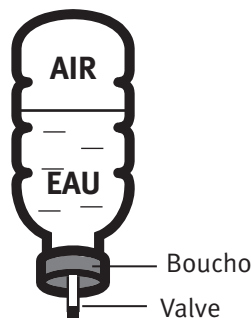
Pour débiter

Activité 16

La fusée à eau



La fusée à eau est une bouteille de boisson gazeuse (eau minérale ou soda) que l'on remplit d'un tiers d'eau environ. Puis on met cette bouteille en pression à l'aide d'une pompe à vélo. Quand on va libérer la bouteille, l'air sous pression va éjecter l'eau et ainsi propulser la bouteille. Cependant, comme lorsqu'on gonfle un ballon de baudruche et qu'on le lâche, la bouteille risque de partir un peu dans tous les sens. Pour qu'elle ait un vol plus rectiligne, on va faire comme pour les flèches d'un arc, c'est-à-dire effiler et lester l'avant puis mettre un empennage à l'arrière.



- 1 Quelle est l'origine de la force motrice qui permet à la fusée à eau de décoller ?
- 2 Quel est le point commun entre cette fusée et celles utilisées dans l'aéronautique ? Quelles sont les principales différences ?

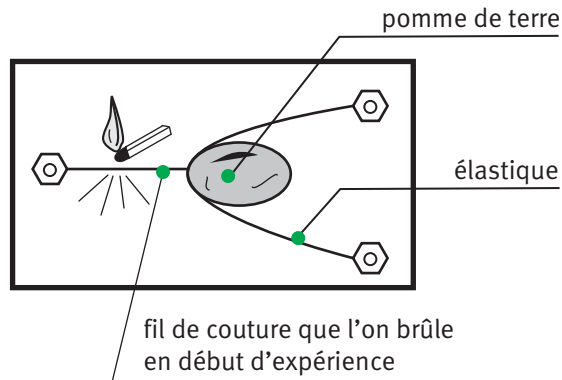
Activité 17

Un « lance-patate »



http://www.canal-u.tv/producteurs/science_en_cours/dossier_programmes/physique_a_main levee/mecanique_des_solides/un_lance_patates

ou bien chercher "canal-utv" sur un moteur de recherche puis taper "lance-patates" dans la fenêtre « RECHERCHER UN PROGRAMME ».



- ❶ Quelles sont les forces non compensées qui s'exercent sur le chariot au moment de la rupture du fil ?
- ❷ Quelles sont les forces non compensées qui s'exercent sur la pomme de terre au moment de la rupture du fil ?
- ❸ Quelles sont les forces non compensées qui s'exercent sur le système « chariot-pomme de terre » lorsque le fil est rompu ? Comment appelle-t-on un tel système ?



Cours

1. Conservation de la quantité de mouvement

a) Système isolé ou pseudo-isolé

Un système est mécaniquement isolé s'il n'est soumis à aucune force. Comme le poids ou la force de gravitation sont toujours présents, il est pratiquement difficile d'avoir un système mécaniquement isolé. Par contre, un système qui est soumis à une somme de forces extérieures nulle se rencontre souvent. Un tel système est dit pseudo-isolé.

b) Conservation de la quantité de mouvement

La seconde loi de Newton est $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Si le système est isolé ou pseudo-isolé, $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Donc $\vec{p}$ est une constante.

Donc, **dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé ou pseudo-isolé se conserve.**

2. Interprétation de la propulsion par réaction

Pour illustrer le principe de la propulsion par réaction, étudions un exemple.

Une personne de masse m_p se tient immobile sur des patins à glace. Elle tient dans ses bras un sac de sable de masse m_s . L'étude se fait dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Comme la personne est sur une piste de glace, on pourra négliger les frottements. Le système est la personne et le sac de sable. Il est soumis à deux forces : le poids et l'action de la piste sur les patins. Ces deux forces se compensent, le système est donc pseudo-isolé. La quantité de mouvement $\vec{p}$ se conserve. Comme la personne est immobile, sa vitesse est nulle et donc la quantité de mouvement aussi.

À la date $t = 0$ s, la personne lance avec une vitesse $\vec{v}_s$ le sac de sable dans une direction. Du coup, la personne part dans l'autre sens, elle subit un recul. On dit que la personne s'est propulsée par réaction. Cela s'explique par la conservation de la quantité de mouvement.

Puisque, avant le lancer, $\vec{p} = \vec{0}$, juste après le lancer on doit encore avoir $\vec{p} = \vec{0}$.

Or le sac de sable a une quantité de mouvement $\vec{p}_s = m_s \vec{v}_s$, donc la personne acquiert nécessairement une quantité de mouvement opposée : $\vec{p}_p = -m_s \vec{v}_s$.

Cette quantité de mouvement peut également s'écrire $\vec{p}_p = m_p \vec{v}_p$ avec $\vec{v}_p$: la vitesse acquise par la personne par réaction.

On a donc $\vec{p}_p = m_p \vec{v}_p = -m_s \vec{v}_s$.

La personne recule donc avec une vitesse : $\vec{v}_p = -\frac{m_s}{m_p} \vec{v}_s$.

Le signe moins indique que la vitesse de la personne a un sens opposé à celle du sac. La valeur de la vitesse de la personne est : $v_p = \frac{m_s}{m_p} v_s$

Activité 18



La masse de la personne est $m_p = 60$ kg, celle du sac est $m_s = 5,0$ kg. Le sac est lancé avec une vitesse de valeur $v_s = 3,0 \text{ m.s}^{-1}$. Calculer la vitesse de recul de la personne.

Cet exemple montre que, pour acquérir une grande vitesse par réaction, il faut expulser à grande vitesse une masse importante. C'est sur ce principe qu'est basée la propulsion des fusées ou des avions à réaction : une turbine permet d'expulser une grande quantité de gaz (de l'air pour les avions) à très grande vitesse. La fusée ou l'avion se mettent en mouvement dans le sens opposé.

On explique ainsi le mouvement de la fusée à eau ou du « lance-patate » : l'ensemble est pseudo-isolé, la quantité de mouvement avant et après la rupture du fil se conserve : elle est nulle. Donc, si la pomme de terre est éjectée dans un sens, pour que la quantité de mouvement reste nulle, le chariot part dans l'autre sens.



Pour conclure

1. Résumé du chapitre

Un système est mécaniquement isolé s'il n'est soumis à aucune force.

Un système est pseudo-isolé s'il est soumis à une somme de forces extérieures nulle.

Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé ou pseudo-isolé se conserve.

La conservation de la quantité de mouvement d'un système pseudo-isolé ou isolé explique la propulsion par réaction.

2. Exercices d'apprentissage

Exercice 6 Pour donner de l'élan à sa luge, un enfant courant à la vitesse $v_e = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$ saute sur sa luge initialement immobile. Les masses de l'enfant et de la luge valent respectivement $m_e = 30 \text{ kg}$ et $m_L = 8,0 \text{ kg}$.

Quelle est la vitesse v_f de luge et de l'enfant juste après le saut de l'enfant. On supposera la luge sur un plan horizontal et on négligera les frottements.

Exercice 7 Sur un billard, deux boules de même masse m ont des vitesses de même valeur, de même direction mais de sens opposé. Elles se choquent de plein fouet. On néglige dans cet exercice les frottements.

- ❶ Déterminer la quantité de mouvement du système constitué des deux boules avant le choc.
- ❷ En déduire la quantité de mouvement du système après le choc.
- ❸ Que peut-on dire alors des vitesses de deux boules après le choc ?
- ❹ En raisonnant sur la quantité de mouvement, est-il *a priori* possible que les deux boules s'immobilisent juste après le choc ? Expliquer pourquoi cela n'est cependant pas réalisable.

5

Mouvement des satellites et des planètes

A

Objectifs

- Étudier le mouvement des satellites et des planètes dans le cas des mouvements circulaires.
- Connaître les lois de Kepler.

B

Pour débiter

Au début du ^{xvii}^e siècle, deux visions du monde s'affrontent : une vision géocentrique qui place la Terre au centre de l'Univers, théorie admise depuis l'Antiquité et développée par Ptolémée dans son *Almageste* (140 après J.-C.), et une vision héliocentrique qui place le Soleil au centre de la Terre. Le premier scientifique qui décrit un système héliocentrique est Nicolas Copernic dans son célèbre *De Revolutionibus Orbium Coelestium* publié en 1543. Il faut attendre Galilée et ses observations des Lunes de Jupiter à l'aide d'une lunette astronomique, en 1609, pour que cette nouvelle vision du monde soit au centre des débats scientifiques de l'époque. En effet, si Jupiter est un astre autour duquel tournent des satellites, pourquoi la Terre serait-elle le seul centre du système solaire ? Et si elle n'était, comme Jupiter, qu'un centre secondaire par rapport au Soleil qui devient alors l'astre principal de l'Univers connu à l'époque ?

Cependant, certaines incorrections, comme les orbites parfaitement circulaires des planètes, énoncées dans cette nouvelle théorie donnent des arguments aux scientifiques défendant la vision géocentrique. Sur la base des nombreuses mesures et observations réalisées par Tycho Brahé, Johannes Kepler énonce, entre 1609 et 1619, les premières lois qui décrivent correctement le mouvement des planètes autour du Soleil : les lois de Kepler. Dans ce chapitre, nous allons étudier ces lois et le mouvement des astres.

Activité 19



En 1619, Kepler éditte sa troisième loi : **le carré de la durée de la période orbitale « T » est proportionnelle au cube de la distance moyenne « a » du soleil** (moyenne de la somme des plus grandes et des plus petites distances).

Vérifier la troisième loi de Kepler à l'aide des mesures suivantes. Évaluer la précision de ces mesures en calculant l'incertitude entre chaque résultat et la moyenne des résultats.

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter
a (km)	$5,791.10^7$	$1,0820.10^8$	$1,4960.10^8$	$2,2794.10^8$	$7,7833.10^8$
T (jours)	87,969	224,70	365,26	686,98	4332,71



Pour comprendre

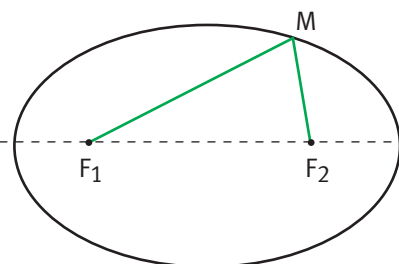
1. Les lois de Kepler

Les trois lois de Kepler relatives au mouvement des planètes sont les suivantes :

- Première loi : **les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers.**

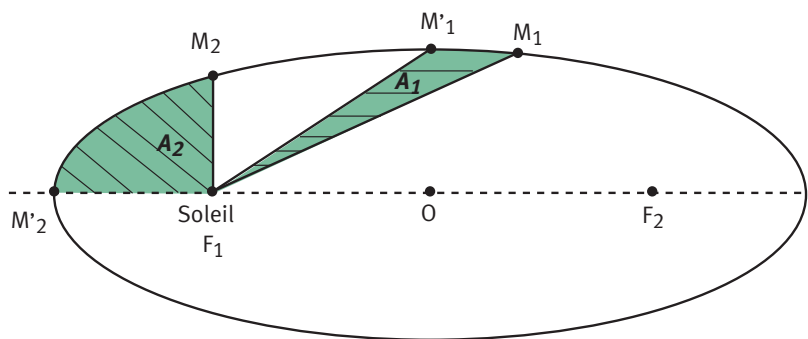
L'orbite est la trajectoire de la planète autour du Soleil. Celle-ci est une ellipse. Une ellipse peut être définie comme étant le lieu des points M dont la somme des distance à deux points fixes F_1 et F_2 , appelés foyers, est constante $MF_1 + MF_2 = \text{cte}$.

Dans la figure ci-contre, M est une planète et le Soleil est en F_1 ou en F_2 .



- Deuxième loi : **le vecteur Soleil-Planète balaie des aires égales pendant des durées égales. Cette loi est également appelée, la loi des aires.**

La figure ci-après montre la trajectoire elliptique d'une planète M. Quatre positions de la planète sont représentées : M_1 , M_1' , M_2 et M_2' . A_1 représente l'aire balayée par le vecteur Soleil-Planète entre les dates de passage de la planète en M_1 et M_1' . A_2 représente l'aire balayée par le vecteur Soleil-Planète entre les dates de passage de la planète en M_2 et M_2' . Si la durée mise par la planète pour aller de M_1 à M_1' est la même que celle pour aller de M_2 à M_2' , alors $A_1 = A_2$. La réciproque est également vraie.

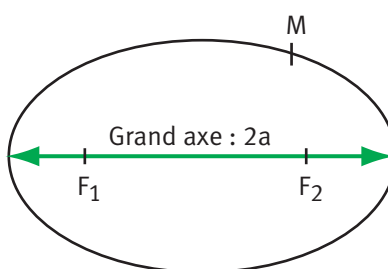


- Troisième loi : **la période de révolution « T » au carré divisée par le demi-grand axe « a » de l'ellipse au cube est constant pour toutes les planètes.**

La période de révolution T est la durée que met la planète pour faire un tour du Soleil. Le grand axe 2a de l'ellipse est représenté par la double flèche dans la figure ci-contre.

Cette troisième loi s'écrit donc :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$



Activité 20



Le périhélie est le point de l'orbite elliptique d'une planète pour lequel la planète est la plus proche du Soleil. Sur l'illustration de la deuxième loi de Kepler, il s'agit du point M₂'.

Expliquer pourquoi, dans le cas d'une orbite elliptique, la vitesse de la planète est la plus grande au périhélie.

2. Étude du mouvement des satellites et des planètes

a) Choix du référentiel

Pour l'étude du mouvement des planètes, on se place dans le référentiel héliocentrique qu'on supposera galiléen.

Pour l'étude des satellites de la Terre, on se placera dans le référentiel géocentrique qu'on supposera galiléen.

Pour l'étude d'un satellite autour d'un autre astre attracteur, le référentiel est le centre de l'astre attracteur, supposé galiléen.

b) Bilan des forces

Le système étudié (satellite ou planète) de masse m n'est soumis qu'à une seule force : la force de gravitation universelle $\vec{F}$.

Rappel $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}$

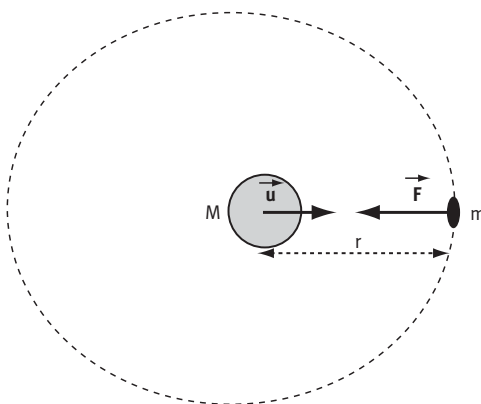
G est la constante de gravitation universelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.

m est la masse en kg du satellite ou de la planète dont on étudie le mouvement.

M est la masse en kg de l'astre attracteur, l'astre autour duquel tourne le système.

r est la distance entre le centre du système et le centre de l'astre attracteur.

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé du centre de l'astre attracteur vers le centre du système.



c) Application de la deuxième loi de Newton

Dans le référentiel choisi supposé galiléen, la seconde loi de Newton s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

D'où $-G \frac{mM}{r^2} \vec{u} = m\vec{a}$ soit $\vec{a} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}$

L'accélération d'un satellite ou d'une planète est indépendante de sa masse m .

Elle est dirigée vers le centre de l'astre attracteur.

3. Mouvement circulaire des satellites et des planètes

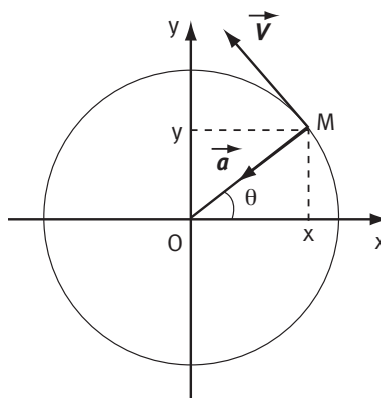
Un mouvement possible pour les satellites est le mouvement circulaire : l'orbite est un cercle. Pour les planètes, on assimilera dans la suite du cours leur orbite elliptique à un cercle dont le centre est le Soleil.

a) Le mouvement circulaire est uniforme

On se place dans le cas d'une orbite circulaire. Démontrons que, dans ce cas, le mouvement du satellite ou de la planète est nécessairement uniforme.

Nous savons (paragraphe 2c de ce chapitre) que le vecteur accélération du satellite est centripète, perpendiculaire à la trajectoire circulaire du mouvement et dirigé vers le centre O représentant le centre de l'astre attracteur.

Par ailleurs, par définition (voir paragraphe 3 de la partie C du chapitre 2), le vecteur vitesse est à tout moment tangent à la trajectoire du satellite.



Donc, à chaque instant, l'accélération est perpendiculaire à la vitesse.

Ainsi, à chaque instant, l'accélération modifie la direction du vecteur vitesse mais pas la norme de ce vecteur vitesse.

Ainsi, la vitesse a une valeur constante mais une direction qui change pour qu'elle reste tangente à la trajectoire.

La démonstration mathématique est proposée dans l'activité 20 à titre d'approfondissement.

Activité 20 (Approfondissement)



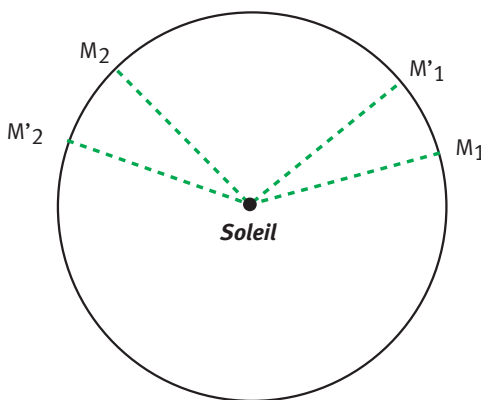
En se plaçant dans le repère Oxy ayant pour origine le centre O de l'astre attracteur, montrer que le satellite situé en un point M tournant autour de O selon une trajectoire circulaire a un mouvement uniforme.

On considérera que l'angle θ varie avec le temps et on notera sa dérivée par rapport au temps θ' (vitesse angulaire) et la dérivée de la vitesse angulaire θ'' .

Aide Utilisez la colinéarité des vecteurs position et accélération.

Remarques

1. Avec une hypothèse supplémentaire, on peut aussi expliquer cette uniformité en considérant l'énergie du satellite. Le système n'est soumis qu'à une force : la force de gravitation. Il n'est soumis à aucune force de frottement : l'énergie mécanique est constante (voir séquence 6). Si on admet que l'énergie potentielle de gravitation est constante sur la trajectoire circulaire du satellite tout comme la force de gravitation (hypothèse), alors l'énergie cinétique est constante. Ces considérations conduisent à conclure que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ est une constante, alors v a une valeur constante : le mouvement est uniforme.
2. Ce résultat se retrouve aussi en appliquant la seconde loi de Kepler : pendant des durées égales, le vecteur Soleil-Planète doit balayer des aires égales. Puisque la trajectoire est un cercle, pour que l'aire balayée soit toujours la même pendant la même durée, la distance parcourue par la planète doit être toujours la même. La planète parcourt des distances égales pendant des durées égales : le mouvement est uniforme.



Pendant des durées égales, $\widehat{M_2 M_2'} = \widehat{M_1 M_1'}$: la planète parcourt des distances égales pendant des durées égales.

b) Expression de la vitesse

Nous avons vu dans le paragraphe 2.c de ce chapitre que l'accélération a pour expression :

$$\vec{a} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u} \quad \text{donc sa valeur est :} \quad a = G \frac{M}{r^2}.$$

Par ailleurs, on sait que, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme (chapitre 2, paragraphe 5.b), l'accélération a pour valeur $a = \frac{v^2}{r}$.

On a donc $a = G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$ d'où $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

- avec G : constante de gravitation universelle ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI),
- M : masse de l'astre attracteur (kg),
- r : rayon de l'orbite circulaire (m).
- v s'exprime en m.s^{-1} .

Activité 21



Données

Masse de la Lune : $m_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, la distance Terre-Lune est $r = 384 \cdot 10^3$ km,
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI.

c) Expression de la période de révolution

La période révolution T est la durée que met le satellite ou la planète pour faire un tour de l'astre attracteur. Puisque le mouvement est uniforme, on peut écrire $T = \frac{L}{v}$ avec L la longueur de l'orbite.

L'orbite étant circulaire, $T = \frac{2\pi r}{v}$.

Donc $T = \frac{2\pi r}{v}$ avec $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

d'où en remplaçant v par son expression dans l'expression de T :

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

puis en simplifiant :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

- avec G : constante de gravitation universelle ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI),
- M : masse de l'astre attracteur (kg),
- r : rayon de l'orbite circulaire (m).
- T s'exprime en s.

Activité 22



Données

Masse de la Terre : $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, la distance Terre-Lune est $r = 384 \cdot 10^3$ km,
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI.

d) Retour sur la troisième loi de Kepler

D'après l'expression de la période de révolution : $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$

Donc $T^2 = 4\pi^2 \times \frac{r^3}{GM}$ soit $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$: tous les objets qui gravitent autour d'un

astre de masse M ont le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ constant. On retrouve ici la troisième loi de Newton, pour les orbites circulaires. Dans le cas d'un mouvement circulaire, le demi-grand axe est égal au rayon du cercle.

Activité 23



Données

Calculer le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ pour les planètes autour du Soleil. Comparer la valeur trouvée avec la valeur moyenne établie à l'activité 1.

la masse du Soleil est $M = 1,9891 \times 10^{30}$ kg, $G = 6,67385 \times 10^{-11}$ SI.



Pour conclure

1. Résumé du chapitre

- Première loi de Kepler : les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers.
- Deuxième loi de Kepler : le vecteur Soleil-Planète balaie des aires égales pendant des durées égales. Cette loi est également appelée la loi des aires.
- Troisième loi de Kepler : la période de révolution « T » au carré divisée par le demi-grand axe « a » de l'ellipse au cube est constante pour toutes les planètes.

L'accélération d'un satellite ou d'une planète est $\vec{a} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}$. Elle est indépen-

dante de sa masse m et est dirigée vers le centre de l'astre attracteur.

Si la trajectoire d'un satellite ou d'une planète est circulaire, alors son mouvement est uniforme.

La vitesse sur une orbite circulaire se retrouve en appliquant la seconde loi de Newton ($a = G \frac{M}{r^2}$) et par la propriété de l'accélération dans le cas d'un mouve-

ment circulaire uniforme ($a = \frac{v^2}{r}$). On obtient $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

La période de révolution T est la durée que met le satellite ou la planète pour faire un tour de l'astre attracteur. Pour une orbite circulaire, $T = \frac{2\pi r}{v}$ avec $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$. On retrouve la troisième loi de Kepler.

2. Exercices d'apprentissage

Exercice 8 Détection d'exoplanètes

La première exoplanète, planète gravitant autour d'une autre étoile que le Soleil, a été détectée en 1995.

Différents moyens sont employés pour détecter l'existence de ces planètes. En décembre 2006, le satellite *Corot*, équipé d'un télescope et de différents instruments de mesure, a été mis en orbite avec pour objectif la détection et l'étude de nouvelles exoplanètes. En mai 2007, une nouvelle exoplanète est découverte en utilisant les premières observations de *Corot*.

On peut détecter une exoplanète en observant ses passages périodiques devant son étoile ; c'est la méthode des transits.

La troisième loi de Kepler donne une relation entre la période de révolution T de la planète, le demi-grand axe a de l'orbite elliptique de la planète autour de son

étoile et la masse M de l'étoile :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Document 1 : Caractéristiques du couple étoile - exoplanète

Exoplanète HD 209458 b	Étoile hôte : HD 209458
<i>Distance moyenne à son étoile : 0,045 u.a.</i>	<i>Distance à la Terre : 153 années de lumière</i>
<i>Type : « Hot Jupiter », planète semblable à Jupiter mais très proche de son étoile</i>	

1 unité astronomique : 1 u.a. = 150.10^6 km ; 1 année de lumière : 1 a.l. = $9,5.10^{15}$ m

Comme on l'a vu précédemment, on ne peut pas détecter de manière directe la présence d'une exoplanète autour d'une étoile. La méthode des transits peut alors être utilisée en se servant d'un photomètre à la sortie du télescope ; cet instrument permet de mesurer la luminosité de l'astre observé. Dans le cas présent, le passage répété d'une planète (figure 4) devant son étoile provoque une diminution périodique de la luminosité de l'étoile.

Par exemple, la mesure de la luminosité de l'étoile HD 209458 en fonction du temps conduit au graphe de la figure 5.

Figure 1 : Passage de la planète devant son étoile hôte

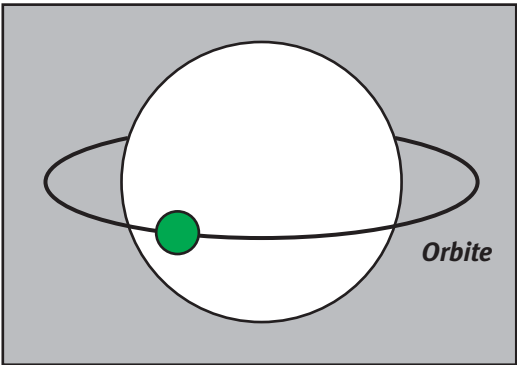
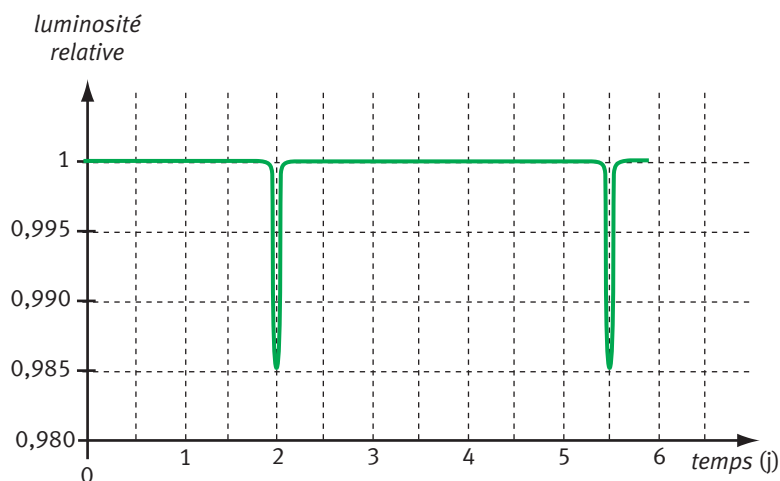


Figure 2 : évolution temporelle de la luminosité de l'étoile HD 209458



Document 2 : Caractéristiques du couple étoile - exoplanète

Exoplanète HD 209458 b	Étoile hôte : HD 209458
Masse : $M_b = 0,69 \times M_J$ M_J étant la masse de Jupiter	Masse : $M = 1,057 \times M_S$ M_S étant la masse du Soleil

Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} (\text{S.I.})$

Masse du Soleil : $M_S = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$; masse de Jupiter : $M_J = 1,90 \times 10^{27} \text{ kg}$
 1 jour = 86 400 s.

- 1 D'après la figure 5, quelle est la période de révolution T de la planète HD 209458 b ? Exprimer cette période T en secondes.
- 2 En utilisant la troisième loi de Kepler et les données du document 2, calculer la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse parcourue par la planète autour de son étoile. Comparer avec la valeur de la distance moyenne de la planète à son étoile donnée dans le document 1.

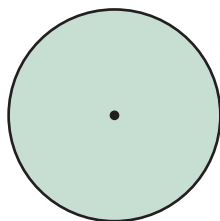
Exercice 9 Mouvement de la Terre

On considère le mouvement de la Terre autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen. On suppose que ce mouvement est circulaire uniforme, de rayon $R = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$. On néglige l'action de tout autre astre.

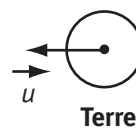
On notera $\vec{a}$ le vecteur accélération du centre d'inertie de la Terre.

- Données**
- Masse de la Terre : $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
 - Masse du Soleil : $M_S = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
 - Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$

- 1 Donner l'expression vectorielle de la force subie par la Terre en utilisant le vecteur $\vec{u}$ du schéma ci-dessous :



Soleil



Terre

- 2 Énoncer puis appliquer la deuxième loi de Newton à la Terre.
- 3 En déduire l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$; on donnera sa direction, son sens et l'expression de sa norme ; le représenter sans considération d'échelle sur le schéma ci-dessus.
- 4 On rappelle que le mouvement est circulaire uniforme. Quelle relation peut-on alors écrire entre l'accélération a et la vitesse v du centre d'inertie de la Terre autour du Soleil ?
- 5 Donner l'expression de la vitesse v du centre d'inertie de la Terre en fonction de la constante de gravitation universelle G , la masse du Soleil M_S et le rayon R de la trajectoire.
- 6 Calculer la valeur de cette vitesse.
- 7 Donner l'expression de la période de rotation T de la Terre autour du Soleil en fonction de la vitesse v et du rayon R de sa trajectoire.
- 8 Montrer alors qu'on peut écrire que $T = \frac{2 \pi R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_S}}$, puis calculer sa valeur.

Exercice 10 Observation d'un satellite de Neptune

Découvert en 1949, Néréide est un des satellites de la planète Neptune. Il est assez petit (320 km de diamètre) et a une orbite très elliptique, la plus allongée de tous les satellites. Néréide met 360 jours pour boucler son orbite.

Dans tout l'exercice, on considère que la planète Neptune et ses satellites sont des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique. Les rayons ou les demi-grands axes des orbites sont supposés grands devant les dimensions de Neptune ou de ses satellites.

Données

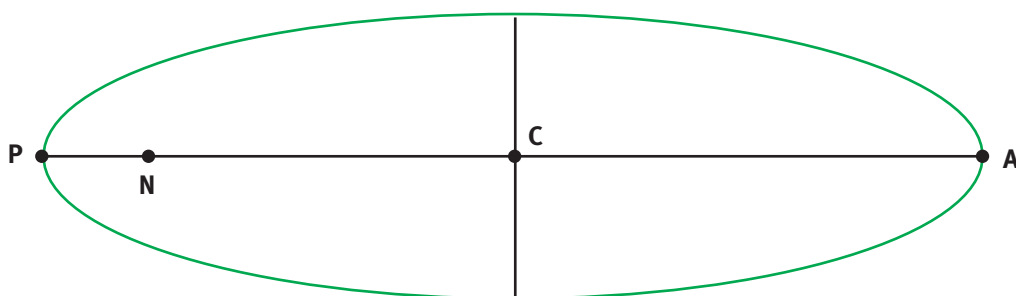
- Neptune : masse : $M_N = 1,025 \times 10^{26} \text{ kg}$
- Néréide : demi-longueur du grand-axe : $a = 5513 \times 10^3 \text{ km}$
- Constante de gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$

- ❶ D'après le texte, « Néréide est assez petit (320 km de diamètre) et a une orbite très elliptique ». Choisir parmi les propositions suivantes le référentiel dans lequel est décrite cette orbite :

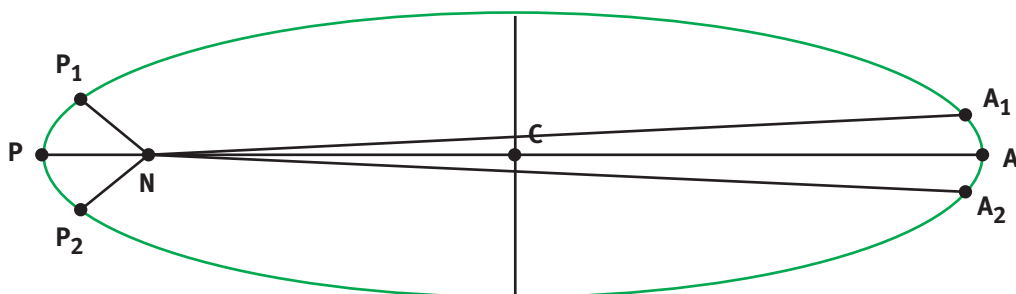
a. héliocentrique b. néreïdocentrique
c. neptunocentrique d. géocentrique

- ❷ Énoncer les première et deuxième lois de Kepler appliquées au cas étudié ici.

- ❸ Placer sur la figure ci-dessous la demi-longueur a du grand axe de Néréide.



- ❹ On considère les aires balayées par le segment reliant Neptune à Néréide pendant une même durée en différents points de l'orbite. Sur la figure ci-dessous, elles correspondent aux aires des surfaces formées par les points N, P_1 et P_2 autour du péricentre P d'une part et N, A_1 et A_2 autour de l'apocentre A d'autre part.



4.1. Quelle relation relie ces aires ?

4.2. Comparer alors les vitesses de Néréide aux points A et P.

❺ Troisième loi de Kepler

On souhaite déterminer la période de révolution T_{ner} de Néréide.

5.1. Énoncer la troisième loi de Kepler.

5.2. Calculer la valeur de $\frac{T_{\text{rev}}^2}{R_1^3}$ en $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.

5.3. À l'aide des questions précédentes, en déduire la période de révolution T_{ner} de Néréide. Puis comparer à la valeur donnée dans le texte.

6

Pour clore la séquence

A

Fiche de synthèse

Temps et cinématique

Un point M est repéré par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

La vitesse d'un point M est définie par $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Propriétés du vecteur vitesse $\vec{v}$:

- ▶ direction tangente au mouvement
- ▶ sens dans le sens du mouvement
- ▶ norme égale à la valeur de la vitesse instantanée en m.s^{-1} à l'instant t soit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

L'accélération d'un point M est définie par $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

La norme du vecteur accélération est égale à la valeur de l'accélération instantanée en m.s^{-2} à l'instant t soit : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Un mouvement est rectiligne uniforme si l'accélération est nulle.

Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète (perpendiculaire à la trajectoire et orientée vers le centre du cercle) et a pour valeur :

$$a = \frac{v^2}{R} \text{ où } R \text{ est le rayon de la trajectoire.}$$

Les lois de Newton

La quantité de mouvement d'un système de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}$ est la grandeur définie par

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- La première loi de Newton (ou principe d'inertie) est :

Dans un référentiel galiléen, si la somme des forces extérieures exercées sur un système est nulle, alors son centre d'inertie est soit immobile, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, et réciproquement :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_G = c\vec{e}$$

- La deuxième loi de Newton est :

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures exercées sur un système est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

La deuxième loi de Newton s'écrit pour un système de masse constante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}.$$

$\vec{a}$ est l'accélération du centre d'inertie du système.

- La troisième loi de Newton (ou principe des actions réciproques) est :

Soit A et B deux points en interaction. La force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ exercée par A sur B et la

force $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ exercée par B sur A sont telles que : $\vec{F}_{A \rightarrow B} = - \vec{F}_{B \rightarrow A}$

Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé

Un système est mécaniquement isolé s'il n'est soumis à aucune force.

Un système est pseudo-isolé s'il est soumis à une somme de forces extérieures nulle.

Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé ou pseudo-isolé se conserve.

Cette conservation de quantité de mouvement explique la propulsion par réaction.

Mouvement des satellites et des planètes

- Première loi de Kepler : les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers.
- Deuxième loi de Kepler : le vecteur Soleil-Planète balaie des aires égales pendant des durées égales. Cette loi est également appelée la loi des aires.
- Troisième loi de Kepler : la période de révolution « T » au carré divisée par le demi-grand axe « a » de l'ellipse au cube est constant pour toutes les planètes.

L'accélération d'un satellite ou d'une planète est indépendante de sa masse m et est dirigée vers le centre de l'astre attracteur.

Si la trajectoire d'un satellite ou d'une planète est circulaire, alors on peut montrer que son mouvement est uniforme (valeur constante de la vitesse).

Dans le cas d'une trajectoire circulaire, on peut trouver les expressions de la vitesse et de la période de révolution T en appliquant la seconde loi de Newton. On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler.

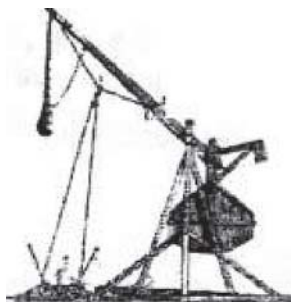
B

Exercices de synthèse

Exercice 1 Cet exercice doit être réalisé sans calculatrice.

Le trébuchet est une machine de guerre utilisée au Moyen Âge au cours des sièges de châteaux forts. Le projectile pouvait faire des brèches dans les murailles des châteaux forts situés à plus de 200 m du trébuchet. Son principe de fonctionnement est le suivant :

Un contrepoids relié à un levier est maintenu à une certaine hauteur par des cordages. Il est brusquement libéré. Au cours de sa chute, il agit sur un levier au bout duquel se trouve une poche en cuir dans laquelle est placé le projectile.



Lors de sa libération, le projectile de la poche se trouve à une hauteur $H = 10 \text{ m}$ et est projeté avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.

Les mouvements du contrepoids et du projectile s'effectuent dans un champ de pesanteur uniforme.

Données

- Masse du projectile $m = 130 \text{ kg}$.
- Intensité du champ de pesanteur $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Étude du mouvement du projectile après libération

Le système étudié est le projectile. Les frottements de l'air sur le projectile seront négligés dans cette étude. On supposera le projectile en chute libre. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est parallèle à l'axe Oz , axe vertical dirigé vers le haut. L'axe Ox est horizontal, le mouvement se fait dans le plan xOz .

- 1 Donner les caractéristiques (sens, direction et valeur) du poids $\vec{P}$.
- 2 En appliquant la deuxième loi de Newton dans le cadre de la chute libre, déterminer les coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération du centre d'inertie du projectile dans le repère indiqué.
- 3 Donner l'expression des coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$, notées v_{0x} et v_{0z} , en fonction de v_0 et α .
- 4 On appelle composante horizontale de la vitesse la coordonnée $v_x(t)$ du vecteur $\vec{v}$ et composante verticale la coordonnée $v_z(t)$.

Déterminer l'expression des composantes horizontale et verticale $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ du système au cours de son mouvement.

- 5 En déduire la nature du mouvement du projectile en projection sur l'axe horizontal. Justifier.
- 6 Déterminer l'expression des équations horaires du mouvement du projectile : $x(t)$ et $z(t)$.

- 7 Montrer que l'équation de la trajectoire du projectile est la suivante :

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + H$$

- 9 Quelle est la nature de la trajectoire du projectile ? Représenter qualitativement l'allure de la trajectoire.
- 10 En utilisant l'expression de l'équation de la trajectoire obtenue à la question 7, indiquer les paramètres de lancement qui jouent un rôle dans le mouvement du projectile.
- 11 Dans le cas où le projectile est lancé avec une vitesse initiale horizontale, montrer que l'abscisse de son point de chute est : $x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$
- 12 Avec quelle vitesse initiale v_0 horizontale, le projectile doit-il être lancé pour atteindre la base du mur du château situé à une distance $x = 100$ m ?

Aide au calcul $\sqrt{0,5} = 7,1 \times 10^{-1}$; $\sqrt{2} = 1,41$.

Exercice 2

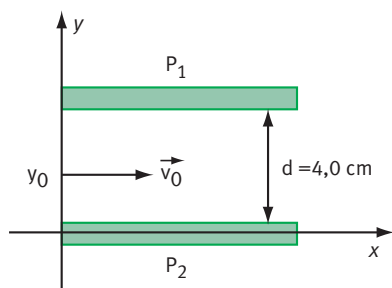
L'exercice a pour but de comparer le mouvement d'une particule chargée traversant un champ électrique et le mouvement d'un projectile lancé horizontalement dans le champ de pesanteur terrestre.

Données

Masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ; charge de l'électron $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; champ de pesanteur $g = 9,81$ m.s⁻²

Déviations d'un faisceau d'électrons dans un champ électrique uniforme

Le champ électrique est créé par un condensateur plan constitué de deux plaques parallèles et horizontales (P_1 et P_2) reliées à un générateur de tension constante $U = 205$ V et séparées d'une distance d , comme l'indique la figure ci-dessous.



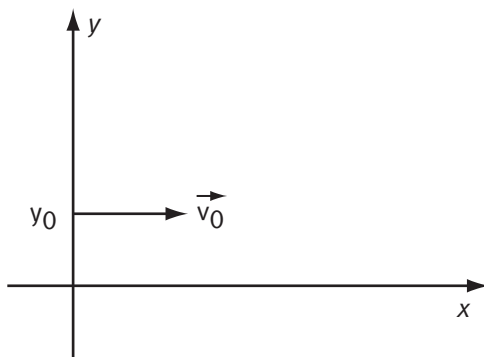
Tous les électrons pénètrent dans le champ, supposé uniforme, à l'ordonnée y_0 et sont animés de la même vitesse parallèle aux plaques.

- 1 Montrer, par un calcul, qu'il est légitime de négliger la force de pesanteur par rapport à la force électrique pour l'électron.
- 2 Un électron pénètre dans le champ à l'instant initial ($t = 0$ s). Établir l'expression vectorielle de son accélération, en fonction de e , m et E .
- 3 On veut que le faisceau soit dévié vers le bas. Reproduire la figure et représenter (sans souci d'échelle) la force qui s'exerce sur la particule à son entrée dans le champ ainsi que le champ électrique. Quelle est la plaque de plus haut potentiel électrique ? Justifier la réponse.
- 4 Donner les coordonnées du vecteur accélération et établir les équations horaires du mouvement de la particule.
- 5 Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire est de la forme $y = A_1 x^2 + B_1$ où A_1 et B_1 sont des constantes.

- ⑥ Vérifier que la constante A_1 est liée à la valeur de l'accélération a_1 par la relation $A_1 = \frac{a_1}{2v_0^2}$. Calculer A_1 pour $v_0 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$.

Mouvement d'une bille lancée horizontalement dans le champ de pesanteur terrestre

Une bille homogène de masse $m = 2 \text{ g}$ est lancée horizontalement avec une vitesse initiale à l'aide d'un pistolet à bille de masse $M = 250 \text{ g}$. À l'instant initial, son altitude par rapport au sol est y_0 , comme l'indique la figure ci-dessous.



- ① Quelles sont les actions dues à l'air sur la bille au cours du mouvement ? Dans la suite de l'exercice, ces actions seront négligées.
- ② Donner les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}_2$ du mouvement de la bille (direction, sens et valeur a_2).
- ③ Donner les caractéristiques du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ et du vecteur accélération $\vec{a}'$ du mouvement du pistolet à bille en supposant que l'enfant qui tient le pistolet n'oppose aucune force pour retenir le mouvement de recul de l'appareil.
- ④ L'équation cartésienne de la trajectoire est de la forme $y = A_2 x^2 + B_2$ où A_2 et B_2 sont des constantes avec $A_2 = \frac{a_2}{2v_0^2}$. Si $v_0 = 14,0 \text{ m.s}^{-1}$, calculer A_2 .
- ⑤ Au moment du lancement, la bille est à la hauteur $y_0 = 1,50 \text{ m}$ du sol. Elle touche le sol à l'abscisse $x_s = 7,75 \text{ m}$. Retrouver avec ces données la valeur de la constante A_2 .

Comparaison des mouvements de la bille et de l'électron

- ① Comparer la trajectoire du centre d'inertie de chacun des deux corps.
- ② Dans chaque cas, quelle est l'influence de la masse du corps sur :
 - ▶ la force subie par ce corps ?
 - ▶ l'accélération du mouvement ?

Exercice 3 Des lois de Kepler à l'étude d'un astéroïde...

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de quelques planètes du système solaire et de déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia, récemment découvert par une équipe d'astronomes. Celui-ci a la forme d'une grosse pomme de terre mesurant quelques centaines de kilomètres.

Par souci de simplification, dans tout l'exercice, les astres étudiés sont considérés à répartition sphérique de masse.

Donnée Constante de gravitation universelle $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ S.I}$

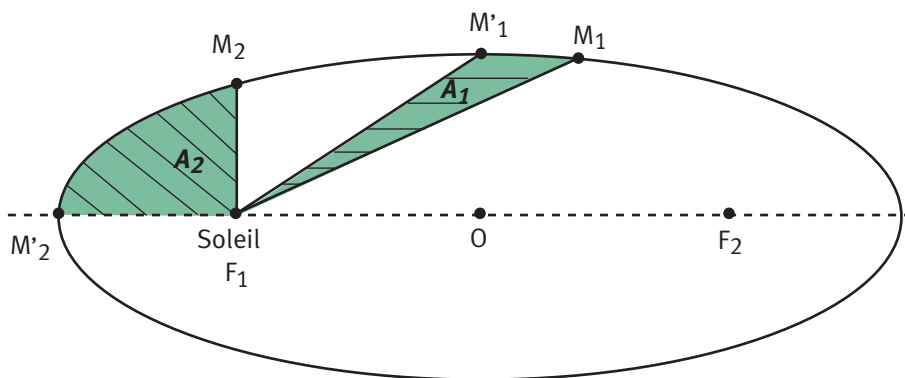
Les représentations vectorielles demandées sont à effectuer sans souci d'échelle.

1 En hommage à Kepler

« Johannes Kepler, né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt, près de Stuttgart (Allemagne), mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne, est un astronome célèbre. Il a étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic. Il a également découvert que les trajectoires des planètes n'étaient pas des cercles parfaits centrés sur le Soleil mais des ellipses. En outre, il a énoncé les lois (dites lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leurs orbites. »

1.1. Planètes en orbite elliptique

La figure ci-dessous représente la trajectoire elliptique du centre d'inertie M d'une planète du système solaire de masse m dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen. Les deux foyers F_1 et F_2 de l'ellipse et son centre O sont indiqués.



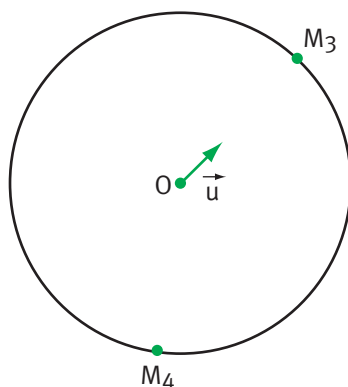
1.1.1. En utilisant une des lois de Kepler, justifier la position du Soleil indiquée sur la figure.

1.1.2. On suppose que les durées de parcours entre les points M_1 et M'_1 puis M_2 et M'_2 sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, trouver la relation entre les aires hachurées A_1 et A_2 sur la figure.

- 1.1.3. La valeur de la vitesse moyenne entre les points M_1 et M'_1 est-elle inférieure, égale ou supérieure à celle entre les points M_2 et M'_2 ? Justifier.

1.2. Planètes en orbite circulaire

Dans cette partie, pour simplifier, on modélise les trajectoires des planètes du système solaire dans le référentiel héliocentrique par des cercles de rayon r dont le centre O est le Soleil de masse M_S .



- 1.2.1. Reproduire le schéma ci-dessus et représenter sur ce schéma la force de gravitation $\vec{F}_3$ exercée par le Soleil sur une planète quelconque du système solaire de masse m dont le centre d'inertie est situé au point M_3 .

- 1.2.2. Donner l'expression vectorielle de cette force au point M_3 , en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$.

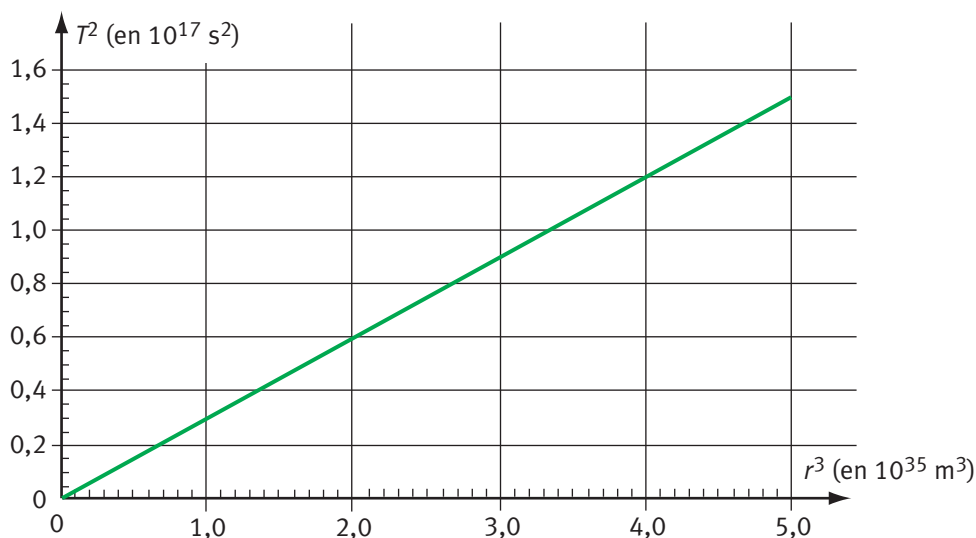
Pour la suite, on considère que les valeurs des autres forces de gravitation s'exerçant sur la planète sont négligeables par rapport à la valeur de $\vec{F}_3$.

- 1.2.3. En citant la loi de Newton utilisée, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_3$ du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse m du système solaire dont le centre d'inertie est situé au point M_3 .

- 1.2.4. Représenter sur le schéma les vecteurs accélérations $\vec{a}_3$ et $\vec{a}_4$ du centre d'inertie d'une planète quelconque du système solaire respectivement aux points M_3 et M_4 .

- 1.2.5. En déduire la nature du mouvement du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse m du système solaire.

- 1.2.6. Le graphe de la figure ci-après représente l'évolution du carré de la période de révolution des planètes Terre, Mars et Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Ce graphe est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?



1.2.7. En utilisant ce graphe, montrer que :

$$\frac{T^2}{r^3} \approx 3,0 \times 10^{-19} \text{ S.I.}$$

1.2.8.

« Une équipe composée de Franck Marchis (université de Californie à Berkeley) et de trois astronomes de l'Observatoire de Paris, Pascal Descamps, Daniel Hestroffer et Jérôme Berthier, vient de découvrir un astéroïde, nommé Rhea Sylvia, qui gravite à une distance constante du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans. »

À l'aide des données de l'article précédent et du résultat de la question 1.2.7., calculer la distance séparant les centres respectifs de Rhea Sylvia et du Soleil.

Donnée 1 an = 365 jours

2 La troisième loi de Kepler comme balance cosmique

« Grâce au Very Large Telescope de l'European Southern Observatory (ESO) au Chili, les astronomes ont également découvert que Rhea Sylvia était accompagné de deux satellites baptisés Remus et Romulus. Leurs calculs ont montré que les deux satellites décrivent une orbite circulaire autour de Rhea Sylvia ; Romulus effectue son orbite en 87,6 heures. Les distances entre chaque satellite et Rhea Sylvia sont respectivement de 710 kilomètres pour Remus et 1 360 kilomètres pour Romulus. »

On s'intéresse désormais au mouvement circulaire uniforme du centre d'inertie d'un satellite de Rhea Sylvia. L'étude est faite dans un référentiel « Rhea Sylvia-centrique » muni d'un repère dont l'origine est le centre de Rhea Sylvia et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes.

- 2.1. On rappelle que la troisième loi de Kepler a pour expression littérale : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$. Dans le cadre de l'étude du mouvement de Remus et Romulus autour de Rhea Sylvia, donner la signification de chaque grandeur et son unité. En déduire l'unité de G dans le système international.
- 2.2. À l'aide des données de l'article précédent et de la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia.

